АКАДЕМИЯ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

С. И. ЗЕТЕЛЬ

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙКИ И ГЕОМЕТРИЯ ЦИРКУЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
МОСКВА · 1950

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

С. И. ЗЕТЕЛЬ

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙКИ И ГЕОМЕТРИЯ ЦИРКУЛЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1950

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книжка имеет двоякое назначение: она предназначена для математических кружков и может быть использована учителем в школьном преподавании.

Книжка, главным образом, посвящена геометрии линейки, которой отведены три главы, тогда как геометрии циркуля посвящена только одна глава.

Геометрия линейки подготавливает учащихся к проективной геометрии и имеет несравненно бо́льшую ценность, чем геометрия циркуля, сохранившая в наше время, главным образом, историческое значение.

В первой части рассмотрены задачи на построение, решаемые одной линейкой (проведением лишь прямых линий), когда в плоскости чертежа дана неподвижная вспомогательная фигура.

В первой главе такой вспомогательной фигурой является: в одних задачах окружность, центр которой не предполагается известным, в других — отрезок с данной серединой, в третьих — параллелограм, квадрат. Заканчивается первая глава задачами об отыскании центра окружности одной линейкой при данной вспомогательной фигуре; такой фигурой является параллелограм, равнобедренная трапеция, правильный многоугольник, равносторонний треугольник при некотором дополнительном условии и т. д.

В задачах второй главы вспомогательной фигурой является окружность с данным центром. В десятой и одиннадцатой темах второй главы доказана возможность решения задач второй степени (задач, решаемых циркулем и линейкой) одной линейкой при данном круге с известным центром. В двенадцатой теме рассматривается построение линейкой и циркулем при постоянном растворе. В тринадцатой теме рассматриваются построения с помощью линейки и эталона длины. В этой теме показано, что не всякая задача второй степени может быть решена с помощью линейки и эталона длины.

Вторая часть книжки состоит из одной главы, посвященной геометрии циркуля. Возникновение построений, производимых одним циркулем для решения задач второй степени, объясняется, главным образом, тем, что циркуль является более совершенным инструментом, чем линейка. Потребности технического черчения (особенно при тонкой резьбе на металлических пластинках) способствовали появлению интереса к построению одним циркулем. Известное доказательство положения, что всякая задача второй степени может быть решена одним циркулем, дано в последней теме третьей главы.

Третья часть книжки состоит из одной главы и заключает материал, дополняющий первую часть. Здесь подробно рассматриваются свойства гармонических четверок и дается применение гармонических четверок к решению задач одной линейкой. Заканчивается глава рассмотрением полюса и поляры относительно круга. Последняя часть, таким образом, содержит элементы проективной геометрии. Понятие гармонизма дано метрически. Автору не удалось дать современного изложения элементов проективной геометрии, доступного для учащихся VIII класса, на которых, главным образом, рассчитана эта книга.

Каждая часть книжки может быть изучена отдельно от двух других. Третья часть несколько труднее первых двух и рассчитана на более сильных учащихся, но может быть изучена совершенно отдельно от двух других частей. Внутри каждой части темы связаны между собой и должны изучаться последовательно.

Таково содержание рассматриваемой книжки. В ней собрано 140 задач на построение. Большинство задач приводится с решениями. Часто дается только построение, читатель должен сам произвести анализ, доказательство и исследование. Отсюда видно, что приводимые решения задач не освобождают читателя от самостоятельной работы.

Приведем некоторые задачи геометрии линейки и геометрии циркуля, которые могут найти место на уроках геометрии. Например, после изучения теоремы о точке пересечения высот треугольника следует показать учащимся, что эта теорема позволяет при помощи одной линейки опустить перпендикуляр на диаметр круга, центр которого не дан. Учитель, показав решение этой задачи для точки, лежащей вне или внутри круга, может предложить учащимся решить эту же задачу для точки, лежащей на окружности. Теорема о средней линии треугольника позволяет решить одной линейкой ряд интересных задач (тема II). Часть этих задач может быть рассмотрена на уроках, часть дана для домашней работы. Пользуясь подобием треугольников, учащиеся могут легко решить одной линейкой следующую интересную задачу: даны три параллельные прямые и три точки, не лежащие на этих прямых; построить треугольник так, чтобы его вершины лежали на данных параллельных прямых, а стороны или их продолжения проходили через данные точки. Эта задача подробно решается в прилагаемом введении.

Хорошо решается задача: в треугольнике дана средняя линия; пользуясь одной линейкой, построить треугольник из медиан данного треугольника (задача № 7 темы третьей). Имея элементарные сведения о подобии треугольников, учащиеся могут усвоить изящное построение $\frac{1}{n}$ части отрезка при наличии прямой, параллельной той прямой, на которой расположен отрезок. Полезно познакомить учащихся с делением отрезка на равные части линейкой и циркулем при постоянном растворе (тема двенадцатая). Интересна задача об отыскании центра круга одной линейкой при наличии дополнительных данных (тема пятая). В книжке имеется несколько задач, посвященных геометрическим преобразованиям (симметрия относительно оси, сжатие к оси, сдвиг относительно оси, родство). Для решения приведенных задач следует ознакомить учащихся с геометрическими преобразованиями. Лучше всего для этого использовать статью П. С. Моденова „Геометрические преобразования" („Математика в школе", № 6 за 1948 год).

Переходим к решению задач одним циркулем. Просто решается задача, выясняющая возможность построения окружности около данного четырехугольника (задача № 4 темы четырнадцатой).

В задаче № 3 темы пятнадцатой приводится способ построения перпендикуляра к прямой. Этот способ имеет практическое значение при восставлении перпендикуляра в конце отрезка, когда отрезок не может быть продолжен за точку, в которой должен быть восставлен перпендикуляр. При изучении вопроса об относительном положении окружностей полезно решить задачи:

1) при помощи одного циркуля узнать, проходит ли прямая, заданная двумя своими точками, через центр данной окружности (задача № 1 темы шестнадцатой);

2) найти точки пересечения прямой, заданной двумя своими точками, с заданной окружностью (задача № 2 той же темы);

3) при помощи циркуля (не пользуясь линейкой) найти точки касания касательных, проведенных из внешней точки данной окружности (задача № 6 той же темы).

Из этого, далеко неполного перечисления задач видно, что геометрия линейки и геометрия циркуля дают интересный материал для школьного преподавания.

Мы полагаем, что учитель может найти для многих теорем планиметрии интересные задачи геометрии линейки и геометрии циркуля. Решение таких задач способствует лучшему пониманию и усвоению курса. Эти задачи оживят преподавание геометрии и дадут интересный материал для домашней работы учащихся. Рассматриваемые задачи можно рекомендовать при повторении курса планиметрии.

Попутно обращаем внимание читателей на простой способ построения циркулем и линейкой геометрического места точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек постоянна (это геометрическое место необходимо для обоснования построений одной линейкой). Обычно предлагаемые построения этого геометрического места сложнее построения, данного нами в теме одиннадцатой.

Учитывая, что в школьном курсе геометрии мало уделяется внимания таким понятиям, как „степень точки", „радикальная ось", мы несколько подробнее остановились на вопросе о радикальной оси.

В теме семнадцатой вводится понятие об инверсии, и в этой же теме инверсия применяется для отыскания центра круга при помощи циркуля.

Геометрия линейки и геометрия циркуля могут быть предметом факультативного курса в педвузах. Автор этих строк провел такой курс в Московском городском педагогическом институте им. В. Г. Потемкина.

Главное назначение книжки—дать материал для кружковой работы учеников VIII класса средней школы. Важность работы школьных математических кружков ясна каждому. Если для математических кружков IX и X классов можно указать интересную тематику (задачи на построение по стереометрии, введение в проективную геометрию, понятие о неевклидовой геометрии, элементы номографии), то для кружков VIII класса такая тематика почти отсутствует. Изучение в школьных кружках VIII класса геометрии линейки и геометрии циркуля вполне доступно учащимся и может их заинтересовать.

Руководя кружком, учитель, сообразуясь с силами докладчиков и участников кружка, может в некоторых темах исключить часть задач, оставив наиболее подходящие.

Мы полагаем, что учитель и участники кружка составят ряд новых задач, легко решаемых одной линейкой или одним циркулем.

С целью сделать книжку подходящей для кружковой работы мы сгруппировали все задачи в двадцать четыре отдельных раздела (считая введение). Каждый раздел представляет тему одного доклада в кружке и, как нам кажется, вполне по силам среднему учащемуся VIII класса. Трудности, если могут возникнуть, то разве при изучении десятой и одиннадцатой тем и двух последних тем второй части. Учитель, руководя работами кружка, поможет докладчикам преодолеть трудности и этих тем. Для сильных учащихся не представят затруднения и темы третьей части.

Построение части задач каждой темы следует доводить до конца, используя одну линейку или один циркуль. Желательно применение цветных карандашей для выделения искомых величин. Для большинства задач каждой темы достаточно указать способ решения, не осуществляя ограниченными средствами (только линейкой или только циркулем) построение на бумаге до конца.

Изучение геометрии линейки вызовет у учащихся интерес к проективной геометрии. Решение задач на построение ограниченными средствами подготовит учащихся к решению интересных „стереометрических задач на проекционном чертеже“.

В заключение приведем некоторые исторические справки, которые могут быть полезны учителю при изложении геометрии линейки и геометрии циркуля.

Построения одной линейкой и циркулем при постоянном растворе были известны в глубокой древности. Такие построения встречались у индусов и у арабов. Ими пользовался Леонардо да Винчи. Возможность решения задач второй степени одним циркулем была показана Маскерони в 1797 г. Новейшие исследования показали, что более чем за сто лет до Маскерони геометром Мором в 1672 г. было дано полное исследование вопроса о решении задач на построение одним циркулем. Математиком Штейнером в 1833 г. была доказана теорема, что при пользовании произвольно начерченным кругом (вместе с его центром) каждую задачу второй степени можно решить, проводя лишь одни прямые линии.

Современный советский математик проф. Д. Д. Мордухай-Болтовский показал, что наличие окружности в теореме Штейнера не является необходимым. Д. Д. Мордухай-Болтовский показал, что для решения задач второй степени одной линейкой достаточно иметь в плоскости чертежа сколь угодно малую дугу окружности (а не всю окружность) с данным центром. Н. В. Наумович продолжила работы Д. Д. Мордухая-Болтовского и показала, что дуга окружности может быть заменена сколь угодно малой дугой конического сечения вместе с его центром и одним из фокусов (для дуги параболы — вершина и фокус). Д. Д. Мордухай-Болтовский показал возможность построений одной линейкой на сфере. Проф. С. О. Шатуновский интересовался вопросами методологии геометрических построений. В введении к русскому переводу книги А. Адлера „Теория геометрических построений“ и позже, в специальной книге под заглавием „Об измерении прямолинейных отрезков и построении циркулем и линейкой“, С. О. Шатуновский ввел новые „постулаты“, позволившие представить каждую задачу на построение как абстрактно геометрическую операцию.

Вопросам методологии геометрических построений посвящены работы проф. Н. Ф. Четверухина. В своей книге „Теория геометрических построений“ проф. Четверухин выражает в абстрактной форме свойства инструментов, применяемых при построении. Далее им вводится понятие конструктивных элементов, т. е. таких точек прямых, окружностей, которые либо даны, либо данным инструментом могут быть построены. Введение этого понятия и выражение в абстрактной форме свойств инструментов вносят полную ясность в вопросы решения задач на построение при помощи разных инструментов (линейки, циркуля, угольника и т. д.). В статье „Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии“ проф. Н. Ф .Четверухин уточняет высказанные им ранее положения и дает принципы методики построения в пространстве.

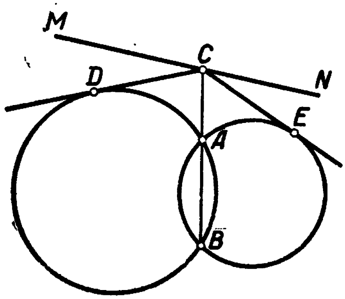
Часть задач настоящего сборника является оригинальной. Значительное число задач заимствовано из журналов: „Вестник опытной физики и элементарной математики“, „Математическое образование“, „Математическое просвещение“, „Математика в школе“.

Автор приносит благодарность члену-корреспонденту АПН проф. Н. Ф. Четверухину и проф. В. А. Ефремовичу, давшим ряд ценных указаний при рецензировании книжки.

ВВЕДЕНИЕ

Читателю известно, что для решения задач на построение обычно применяются циркуль и линейка. Укажем несколько задач, решаемых исключительно линейкой.

№ 1. — В плоском выпуклом четырехугольнике $ABCD$ найти точку O так, чтобы сумма расстояний ее от вершин четырехугольника была наименьшей. Искомая точка — точка пересечения диагоналей четырехугольника.



Черт. 1.

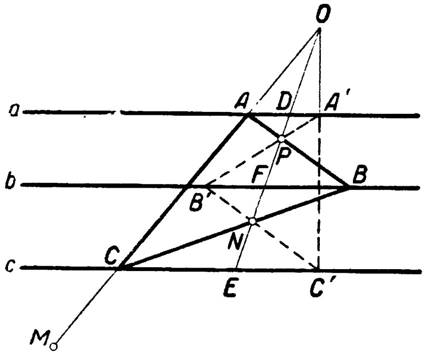
№ 2. — На прямой MN, пользуясь одной линейкой, найти точку, касательные из которой к двум данным пересекающимся окружностям были бы равны между собой (черт. 1).

Искомой точкой C является точка пересечения данной прямой MN и секущей AB, общей двум данным окружностям.

Действительно, $AC \cdot CB = CD^2 = CE^2$. Всегда ли возможна задача?

№ 3. — Даны три параллельные прямые и три точки M, N, P. Построить треугольник так, чтобы его вершины лежали на данных прямых, а стороны или их продолжения проходили через данные точки (черт. 2).

Обозначим данные параллельные прямые через a, b, c и предположим, что сторона AC проходит через точку M. Для решения задачи отбросим последнее условие и построим вспомогательный треугольник $A'B'C'$ так, чтобы его вершина A' лежала на прямой a, вершина C' — на прямой c и чтобы сторона $A'B'$ проходила через точку P, а сторона $B'C'$ — через точку N. Можно построить бесчисленное множество таких треугольников. На чертеже 2 изображен пунктиром треугольник $A'B'C'$.



Черт. 2.

Продолжим $A'C'$ и PN до пересечения в точке O. Покажем, что точка O на прямой PN занимает определенное положение, независимо от выбора точек A', B', C' на данных параллельных прямых.

Из подобия треугольников ODA' и OEC' имеем:

$$\frac{DA'}{EC'} = \frac{OD}{OE}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников $A'DP$ и $B'FP$ имеем:

$$\frac{DA'}{FB'} = \frac{DP}{PF}. \qquad (2)$$

Из подобия треугольников $B'FN$ и $C'EN$ получаем:

$$\frac{FB'}{EC'} = \frac{FN}{EN}. \qquad (3)$$

Перемножая равенства (2) и (3), найдем:

$$\frac{DA'}{EC'} = \frac{DP \cdot FN}{PF \cdot EN} = \text{Const}. \qquad (4)$$

Правая часть равенства (4) — постоянная величина при заданных P и N. Сравнивая равенства (4) и (1), заключаем, что отношение $\frac{OD}{OE}$ сохраняет постоянную величину, т. е. точка O занимает на прямой NP одно и то же положение, каков бы ни был взятый треугольник $A'B'C'$. Определенное положение точки O на прямой NP дает следующее простое решение поставленной задачи: точка пересечения прямой NP с прямой $A'C'$ (стороной вспомогательного треугольника) есть точка O. Прямая OM пересекает прямые a и c соответственно в точках A и C — в вершинах искомого треугольника. Прямые AP и CN пересекутся в точке B, которая будет третьей вершиной искомого треугольника. Покажем, пользуясь подобием треугольников, что точка B лежит на прямой b.

Действительно, предположим, что AP пересекает прямую b в точке B, а CN пересекает прямую b в точке B^*.

Тогда имеем:

$$\frac{AD}{FB}=\frac{DP}{PF}, \tag{5}$$

$$\frac{FB^*}{CE}=\frac{FN}{EN}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\frac{AD}{FB}\cdot\frac{FB^*}{CE}=\frac{DP}{PF}\cdot\frac{FN}{EN}. \tag{7}$$

На основании равенства (4) имеем:

$$\frac{AD}{CE}=\frac{DP\cdot FN}{PF\cdot EN},$$

а потому

$$\frac{AD}{FB}\cdot\frac{FB^*}{CE}=\frac{AD}{CE} \text{ и } FB=FB^*.$$

Следовательно, точки B и B^* совпадают.

Задача имеет, вообще говоря, 6 решений. Условимся вершину треугольника, лежащую на стороне a, обозначать через A, на b — через B, на c — через C. Условие того, что сторона AB или ее продолжение проходит через точку P, будем обозначать так: $AB(P)$. Имеют место следующие возможности:

1) $AB(P)$, $AC(M)$, $BC(N)$;
2) $AB(P)$, $AC(N)$, $BC(M)$;

3) $AB(M)$, $AC(P)$, $BC(N)$;

4) $AB(M)$, $AC(N)$, $BC(P)$;

5) $AB(N)$, $AC(P)$, $BC(M)$;

6) $AB(N)$, $AC(M)$, $BC(P)$.

Приведенные задачи решаются одной линейкой, но между первой и двумя последними имеется различие. Построение данных и решение первой задачи производится исключительно линейкой. В двух последних задачах для построения данных требуется линейка и циркуль, а для решения только линейка.

Часть I — ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙКИ

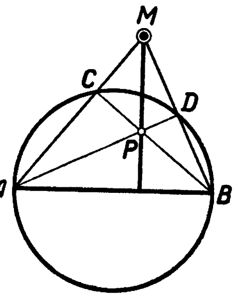
ГЛАВА I

Тема первая

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКА В ОДНОЙ ТОЧКЕ К ПОСТРОЕНИЯМ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Все задачи этой темы решаются одной линейкой на основании теоремы о пересечении высот треугольника в одной точке.

№ 1. — Опустить из точки, лежащей вне или внутри круга, перпендикуляр на диаметр круга, центр которого не дан.



Черт. 3.

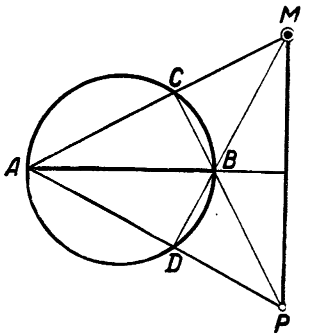
Пусть из точки M (черт. 3) требуется опустить перпендикуляр на диаметр AB.

Проводим прямые AM и BM через точку M и концы диаметра. Через C — точку пересечения AM с окружностью проводим прямую BC и через D — точку пересечения BM с окружностью — прямую AD. Прямые BC и AD пересекаются в точке P. Прямая MP, проходящая через вершину M треугольника AMB и через точку пересечения двух высот треугольника, является третьей высотой этого треугольника и перпендикулярна к диаметру AB.

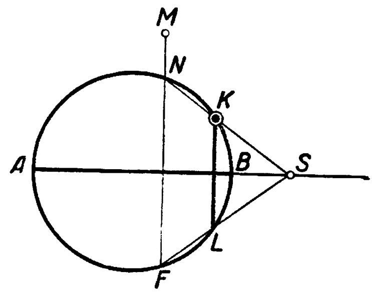
При ином расположении точки M (перпендикуляр, опущенный из точки M, не пересекает окружность) относительно круга (черт. 4) получаем, что прямая MP является стороной треугольника.

В каждом из рассмотренных случаев для построения искомого перпендикуляра проводится пять прямых.

№ 2. — Из точки, лежащей на окружности, опустить перпендикуляр на диаметр.



Черт. 4.



Черт. 5.

Пусть K — данная точка (черт. 5). Возьмем вне или внутри круга произвольную точку M и опустим из точки M перпендикуляр на диаметр AB, пользуясь при этом построении одной линейкой (предыдущая задача). Пусть N и F — точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью. Проводим через N и K прямую до пересечения в точке S с прямой AB. Проводим прямую SF; L — точка пересечения SF с окружностью; KL — искомый перпендикуляр.

Доказательство. Треугольник NSF — равнобедренный; $\smile BN = \smile BF$. Вследствие равенства углов KSB и BSL дуга BK равна дуге BL и, следовательно, $\smile NK = \smile FL$, а потому $KL \parallel NF$ и $KL \perp AB$.

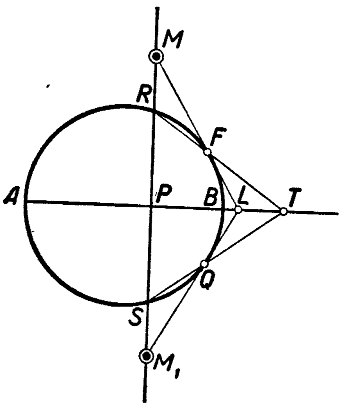
Для построения перпендикуляра нам пришлось провести восемь прямых.

№ 3. — Построить точку, симметричную данной относительно диаметра круга, центр которого не дан.

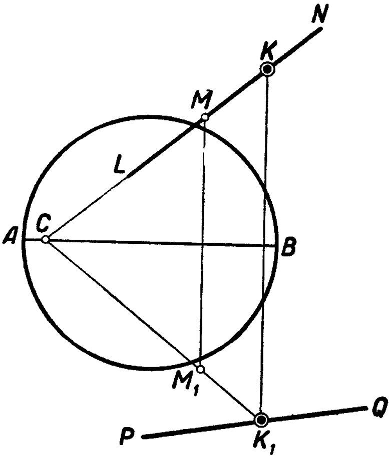
Для частного случая решение нами дано. Действительно, если данная точка лежит на окружности, то, опустив из этой точки перпендикуляр на диаметр (предыдущая задача), найдем на окружности точку, симметричную данной.

Если данная точка не лежит на окружности, то рассмотрим два случая построения точки, симметричной данной.

1) Перпендикуляр, опущенный из данной точки M на диаметр, пересекает окружность (черт. 6). R и S — точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью. Проводим произвольную секущую RFT, где F — точка пересечения секущей с окружностью, а T — с прямой AB. Прямая TS пересекает окружность в точке Q. Далее проводим MFL и LQM_1. Точка M_1 — искомая.



Черт. 6.



Черт. 7.

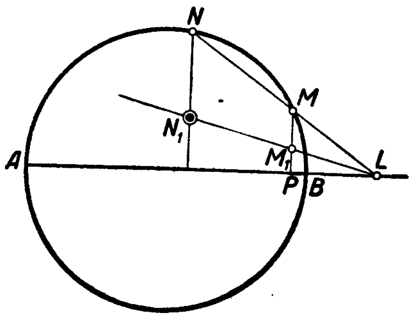
2) Перпендикуляр, опущенный из данной точки M на диаметр, не пересекает окружность. Этот случай предоставим читателю рассмотреть самостоятельно.

№ 4. — На прямых LM и PQ найти пару точек, симметричных относительно диаметра AB (черт. 7).

Строим прямую, симметричную прямой LN. Для построения этой прямой необходимо найти две ее точки. Одна точка C лежит в пересечении LN и AB, другая, M_1 — симметрична произвольной точке M прямой LN. Точка K_1 пересечения CM_1 с PQ — искомая. Проведя через точку K_1 перпендикуляр к диаметру AB, найдем точку K, симметричную K_1.

№ 5. — При помощи одной линейки и при однократном использовании циркуля построить ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника.

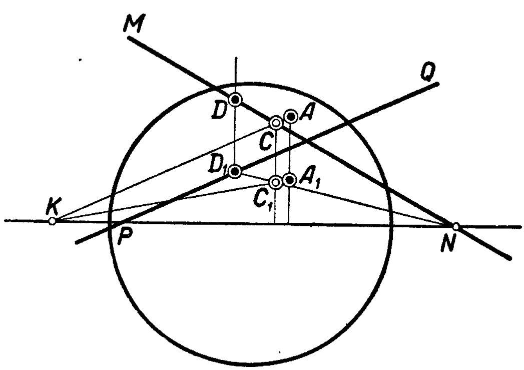
№ 6. — Окружность преобразуется сжатием к диаметру (осью сжатия является диаметр). Точке M окружности соответствует в преобразовании точка M_1. Построить точку N_1, соответственную данной точке N (черт. 8).



Черт. 8.

При сжатии прямая преобразуется в прямую. Точки, лежащие на оси, остаются неизменными, а потому прямая NML перейдет в прямую LM_1, на которой, в пересечении с перпендикуляром, опущенном из точки N на ось, лежит искомая точка N_1.

№ 7. — Прямая MN перпендикулярна к диаметру окружности. При сжатии к оси (к данному диаметру)



Черт. 9.

точка N перейдет в точку N_1. Найти точку, соответственную точке M.

№ 8. — При сжатии к оси (к данному диаметру) A и A_1 — пара соответственных точек. Найти на прямых MN и PQ пару соответственных точек (черт. 9).

На прямой MN выберем произвольную точку C и построим точку C_1, ей соответственную. Прямая C_1N соответствует прямой MN. Прямая C_1N пересекает данную прямую PQ в точке D_1. Точки D и D_1 — искомая пара соответственных точек.

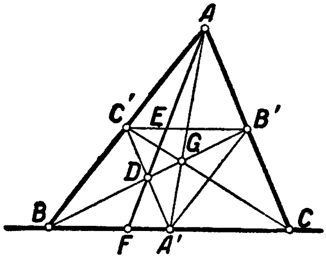
Кроме точек D и D_1, может быть найдена еще пара соответственных точек, если принять, что прямой PQ при сжатии соответствует прямая MN. При построении точек D и D_1 мы считали, что прямая MN при сжатии переходит в PQ, теперь же будем считать, что прямая PQ при сжатии переходит в MN. Читатель сам построит вторую пару соответственных точек.

Тема вторая

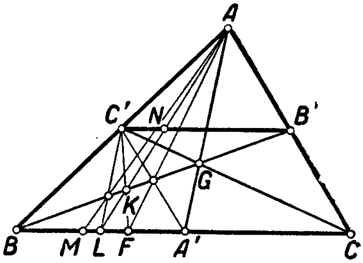
ПОСТРОЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ, ПРОИЗВОДИМЫЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ ПРИ ДАННОЙ СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

№ 1. — По данной средней линии $B'C'$ треугольника ABC построить $\frac{1}{3}$ стороны BC (черт. 10).

Построив точку A' — середину стороны BC, проводим через точку D (точку пересечения прямых BB'



Черт. 10.



Черт. 11.

и $C'A'$) прямую $AEDF$. Из треугольника ABF следует: $BF = 2C'E$. Из параллелограма $BC'B'A'$ имеем $C'D =$

DA'. Из равенства треугольников $C'ED$ и $A'FD$ следует: $C'E = FA'$.

Итак,

$$BF = 2FA', \text{ т. е. } 3FA' = BA'.$$

Отсюда

$$BF = \frac{BC}{3}.$$

№ 2. — Дана средняя линия $B'C'$ треугольника ABC. Пользуясь одной линейкой, построить последовательно $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... стороны BC.

В задаче № 1 показано построение $\frac{1}{3}$ отрезка BC. Пусть BF (черт. 11) $\frac{1}{3}$ BC. Проведем $C'F$ до пересечения в точке K с прямой BB'. Прямая $ANKL$ определит точку L так, что $BL = \frac{1}{4} BC$.

Действительно,

$$BL = 2C'N,$$

$$\frac{C'B'}{BF} = \frac{3}{2}\left(C'B' = \frac{BC}{2}; \quad BF = \frac{BC}{3}\right).$$

Из подобия треугольников $C'NK$ и LKF получим:

$$\frac{C'N}{LF} = \frac{3}{2}; \quad LF = \frac{2C'N}{3}; \quad BL + LF = 2C'N + \frac{2C'N}{3};$$

$$8C'N = BC; \quad BL = 2C'N = \frac{BC}{4}.$$

№ 4. — Показать, что если в предыдущей задаче BF равно $\frac{BC}{n}$, то $BL = \frac{BC}{n+1}$.

Из построения (черт. 11) имеем в — предположение, что BF составляет $\frac{1}{n}$ часть BC:

$$BL = 2C'N; \frac{C'B}{BF} = \frac{n}{2}\left(\text{так как } C'B' = \frac{BC}{2}, \text{ а } BF = \frac{BC}{n}\right).$$

Из подобия треугольников $KB'C'$ и BKF следует:

$$\frac{C'K}{KF} = \frac{n}{2},$$

а из подобия треугольников $C'KN$ и LKF:

$$\frac{C'N}{LF}=\frac{n}{2}; \quad LF=\frac{2C'N}{n}.$$

Тогда

$$BL+LF=2C'N+\frac{2C'N}{n} \quad \text{или} \quad \frac{BC}{n}=\frac{2(n+1)C'N}{n}.$$

Отсюда

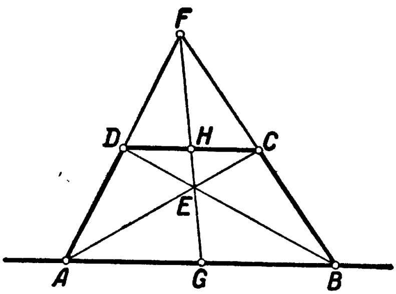
$$2C'N=\frac{BC}{n+1}, \text{ т. е. } BL=\frac{BC}{n+1}.$$

№ 5. — Дана средняя линия $B'C'$ треугольника ABC. Разделить сторону BC на три равных части одной линейкой.

Тема третья

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ К ПОСТРОЕНИЯМ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Теорема. — Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений двух ее непараллельных сторон, проходит через середины оснований трапеции (черт. 12).



Черт. 12.

Доказательство. Отрезки параллельных DC и AB рассечены прямыми FA, FG, FB на пропорциональные части, а потому

$$\frac{AG}{GB}=\frac{DH}{HC}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников AEG и CEH и подобия треугольников GBE и DEH следует:

$$\frac{AG}{HC}=\frac{GE}{EH}=\frac{GB}{DH};$$

$$\frac{AG}{GB}=\frac{HC}{DH}. \qquad (2)$$

Перемножив равенства (1) и (2), получим:

$$\frac{AG}{GB}=1, \text{ т. е. } AG=GB.$$

№ 1. — На прямой даны три точки A, G, B так, что точка G — середина AB; требуется построить прямую, проходящую через данную точку D и параллельную данной прямой AB.

На прямой AD (черт. 12) выберем произвольную точку F, проведем прямые FG, FB, DB. Прямая AE (E — точка пересечения FG и DB) пересечет FB в точке C; DC — искомая прямая.

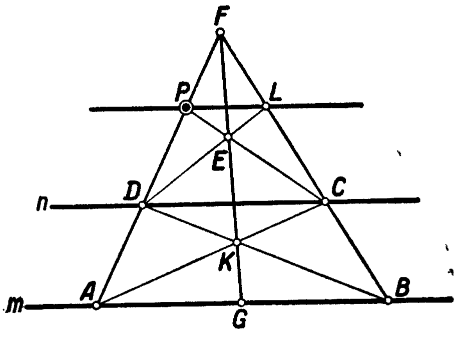
Для построения искомой прямой потребовалось провести пять прямых.

Доказательство. Пусть DC не параллельна AB; тогда проводим $DC' \parallel AB$; AC' пересечет DB в точке E' и прямая FE' пересечет AB в точке G', которая должна быть серединой AB, что противоречит условию.

№ 2. — Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB (черт. 12); требуется разделить этот отрезок на две равные части.

Решение. Через произвольную точку F проводим прямые FA, FB. Далее проводим прямые AC и BD; E — точка пересечения двух последних прямых. Прямая FE пересекает AB в точке G — в середине отрезка AB.

№ 3. — Даны две параллельные прямые m и n и произвольная точка P. Через точку P провести прямую, параллельную данным прямым.



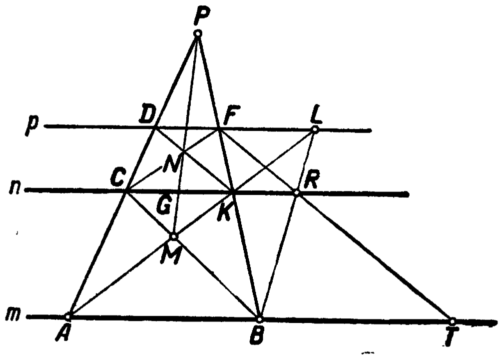
Черт. 13.

Проведем через данную точку P произвольную прямую PDA, на которой возьмем произвольную точку F (черт. 13); из точки F проводим произвольную прямую FCB. Проводим прямые AC и BD. Через K — точку пересечения этих прямых и через точку F проводим прямую FG. G — середина AB. Далее проводим CP, определяющую на прямой FG точку E. Прямая DE пересечет BF в точке L; прямая PL—искомая.

Итак, для решения задачи потребовалось провести восемь прямых.

№ 4. — Даны две параллельные прямые m и n и на одной из них отрезок AB. Требуется удвоить отрезок AB.

Для решения задачи построим произвольную прямую p, параллельную данным (см. задачу № 3). Через произвольную точку P (черт. 14) проведем прямые



Черт. 14.

PA и PB. Пусть они пересекаются с прямой p в точках D и F, а с прямой n — в точках C и K. Определим L — точку пересечения прямых AK и DF. Прямая LB пересечет CK в точке R. Прямая FR определит на прямой m точку T такую, что $BT = AB$.

Действительно,

$$\frac{KR}{AB} = \frac{RL}{BL}; \quad \frac{RL}{BR} = \frac{FR}{RT}.$$

Взяв производную пропорцию, получим:

$$\frac{RL}{BL} = \frac{FR}{FT};$$

но

$$\frac{FR}{FT} = \frac{KR}{BT},$$

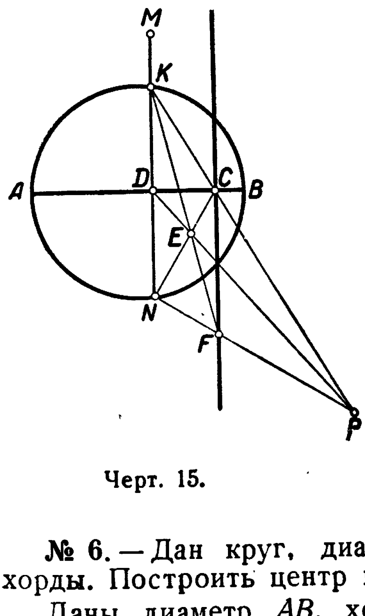
следовательно,

$$\frac{KR}{BT}=\frac{KR}{AB}.$$

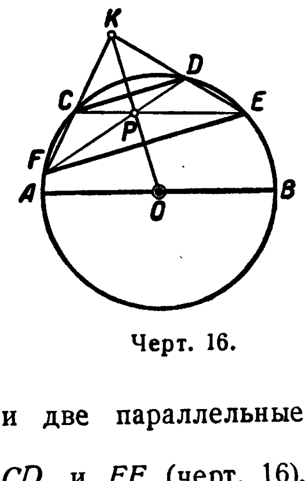
Отсюда $AB=BT$. Для решения задачи построено десять прямых.

№ 5. — Из данной точки C диаметра AB круга с неизвестным центром восставить перпендикуляр к диаметру (черт. 15).

Из произвольной точки M опускаем на AB перпендикуляр MD, пересекающийся с окружностью в точках K и N; $KD=DN$. Итак, на прямой MN имеется отрезок KN с данной серединой D. Через точку C легко провести прямую, параллельную KN. Эта прямая—искомая.



Черт. 15.



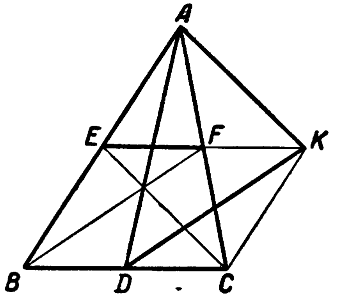
Черт. 16.

№ 6. — Дан круг, диаметр и две параллельные хорды. Построить центр круга.

Даны диаметр AB, хорды CD и EF (черт. 16). Проводим FC и DE до пересечения в точке K. Проводим FD и CE и определяем P — точку их пересечения. Прямая KP пересечет диаметр в центре круга, так как KP проходит через середину FE.

Вопрос. Всегда ли возможна задача?

№ 7. — В треугольнике ABC проведена средняя линия EF (черт. 17). Построить одной линейкой треугольник из медиан AD, BF, CE.



Черт. 17.

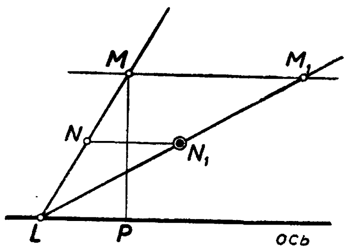
Прямую EF продолжаем за точку F, из точки C проводим прямую, параллельную AB (задача № 1) до пересечения в точке K с продолжением EF. Треугольник AKD — искомый.

Действительно, $EK=BC$, следовательно, $FK=BD$ и $FB=DK$, $AKEC$ — параллелограм, следовательно, $AK=EC$.

Отсюда следует, что стороны треугольника AKD равны медианам данного треугольника.

№ 8. — Построить точку N_1, соответственную данной точке N при сдвиге относительно оси, если известна пара соответственных точек M и M_1.

Сдвигом относительно оси называется такое преобразование, при котором каждая точка M плоскости, не лежащая на оси, сдвигается параллельно оси на расстояние MM_1, пропорциональное расстоянию MP от точки M до оси. Точки, лежащие на оси, при сдвиге остаются неизменными.



Черт. 18.

Прямая MNL (черт. 18) при сдвиге перейдет в прямую LM_1. Для отыскивания точки N_1 достаточно из точки N провести прямую, параллельную оси. Прямую NN_1 можно провести при помощи одной линейки, так как она параллельна двум заданным прямым (оси и прямой MM_1). Итак, если дана ось и пара соответственных точек при сдвиге относительно оси, то одной линейкой можно построить точку, соответственную произвольной данной точке.

№ 9. — Построить точку, соответственную точке N при сдвиге относительно оси, если точка N лежит на прямой MM_1, где M и M_1, — пара соответственных точек.

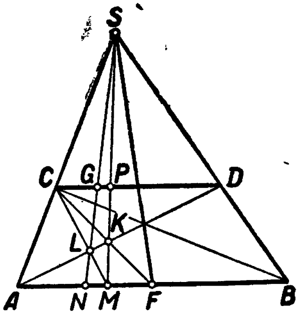
№ 10. — A и A_1 — пара соответственных точек при сдвиге относительно оси. Найти на данных прямых MN и PQ пару соответственных точек (см. задачу № 8 первой темы).

Всегда ли возможна задача?

Тема четвертая

ПОСТРОЕНИЕ $\frac{1}{n}$ ОТРЕЗКА ДАННОЙ ПРЯМОЙ, ЕСЛИ В ПЛОСКОСТИ ЧЕРТЕЖА ДАНА ПРЯМАЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ДАННОЙ

№ 1. — Дан отрезок AB. Пользуясь одной линейкой, построить третью, четвертую, пятую и т. д. части этого отрезка, если на чертеже дана прямая CD, параллельная AB (черт. 19).



Черт. 19.

Пусть AB и CD — параллельные прямые. Определяем точку F — середину отрезка AB. Проводим прямую CF, пересекающую AD в точке K; SK пересекает AB в точке M так, что

$$AM = \frac{1}{3} AB.$$

Доказательство:

$$\frac{CP}{MF} = \frac{CK}{KF} = \frac{CD}{AF}.$$

Так как $MF = AF - AM$,

то

$$\frac{CP}{AF - AM} = \frac{CD}{AF}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников CSD и ASB имеем:

$$\frac{CP}{AM} = \frac{CD}{AB}; \quad \frac{CP}{AM} = \frac{CD}{2AF};$$

$$\frac{CD}{AF} = \frac{2CP}{AM}. \qquad (2)$$

Из сравнений равенств (1) и (2) получаем:

$$\frac{CP}{AF-AM}=\frac{2CP}{AM},$$

$$2AF-2AM=AM;\quad 2AF=3AM;\quad AM=\frac{AB}{3}.$$

Далее проводим CM, пересекающую AD в точке L. Прямая SLN пересечет AB в точке N так, что $AN=\frac{AB}{4}$. Доказательство, аналогичное проведенному, покажет, что $AN=\frac{AB}{4}$.

Предположив, что $AM=\frac{AB}{n}$, докажем, что $AN=\frac{AB}{n+1}$. Рассматривая две пары подобных треугольников CGL, MNL и CLD, MLA, получим: $\frac{CG}{NM}=\frac{CL}{LM}=\frac{CD}{AM}$. Принимая во внимание, что $NM=AM-AN$, получим:

$$\frac{CG}{AM-AN}=\frac{CD}{AM},\tag{3}$$

$$\frac{CG}{AN}=\frac{CD}{AB}$$

$\left(\text{по предположению } AM=\frac{AB}{n}\right)$,

$$\frac{CG}{AN}=\frac{CD}{n\cdot AM},$$

$$\frac{n\cdot CG}{AN}=\frac{CD}{AM},$$

$$\frac{CD}{AM}=\frac{n\cdot CQ}{AN}\tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) имеем:

$$\frac{CG}{AM-AN}=\frac{n\cdot CG}{AN},\quad AN=n\cdot AM-n\cdot AN,$$

$$(n+1)AN=AB;\quad AN=\frac{AB}{n+1}.$$

Приведенное построение просто решает задачу о построении отрезка, равного $\frac{1}{n}$ части данного отрезка, когда n последовательно принимает значения 2, 3, 4 и т. д.

Подсчитаем число прямых, необходимых для построения $\frac{1}{n}$ данного отрезка.

Для отыскания середины отрезка следует провести пять прямых; далее, для построения одной третьей части следует провести еще две прямых и т. д. Итак, для построения $\frac{1}{n}$ данного отрезка следует провести число прямых, равное

$$2(n-2)+5=2n-4+5=2n+1.$$

Например, при $n=2$ имеем пять прямых, при $n=10$ следует провести 21 прямую.

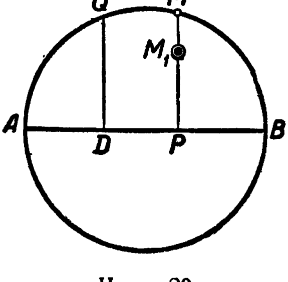
Посмотрим, нельзя ли уменьшить число проводимых прямых.

Рассмотрим частный случай. Пусть $n=10$. Для уменьшения числа проводимых прямых можно внести для построения одной десятой данного отрезка следующее упрощение: разделив отрезок на две равные части (для чего требуется провести пять прямых), построим одну пятую половины данного отрезка, для чего требуется провести $(2.5-1)$ прямых, так как для построения возможно использовать две прямые предыдущего построения; следовательно, при этом построении число прямых равно $5+9=14$. Итак, вместо 21 прямой, получилось 14 прямых.

№ 2. — Разделить отрезок на три равные части, если дана прямая, параллельная прямой, на которой расположен отрезок.

№ 3. — Дана окружность и ее диаметр (центр не дан). Построить точку M_1, соответственную точке M окружности в преобразовании сжатия к оси (осью является данный диаметр), если коэффициент сжатия

$$k=\frac{2}{3}.$$



Черт. 20.

Коэффициентом сжатия называется отношение

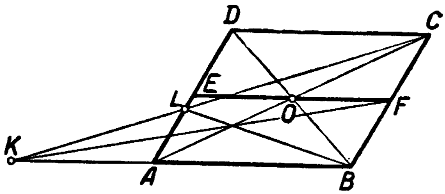
$$\frac{M_1P}{MP}=k=\frac{2}{3}.$$

Из произвольной точки Q (черт. 20) опускаем перпендикуляр QD на ось сжатия. Из данной точки M опускаем перпендикуляр на ось сжатия. Строим точку M_1 так, чтобы $MM_1 = \frac{1}{3} MP$.

Тема пятая

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ, ЕСЛИ В ПЛОСКОСТИ ЧЕРТЕЖА ДАН ПАРАЛЛЕЛОГРАМ ИЛИ КВАДРАТ

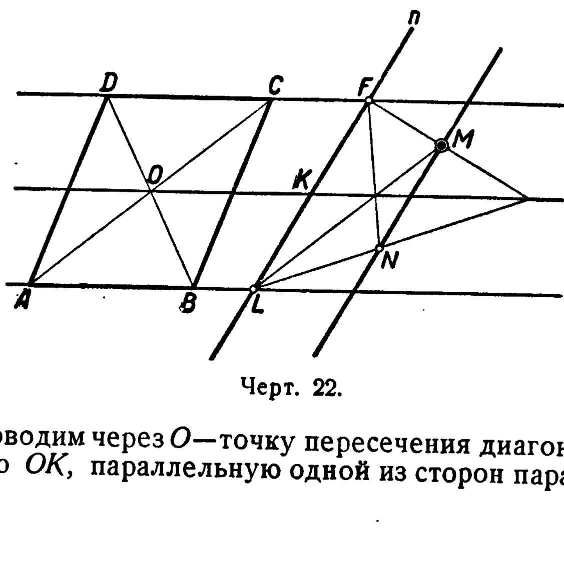
№ 1. — Дан параллелограм $ABCD$. Через точку O пересечения его диагоналей провести прямую, параллельную стороне AB (черт. 21).



Черт. 21.

Делим сторону BC в точке F на две равные части. Прямая EOF — искомая.

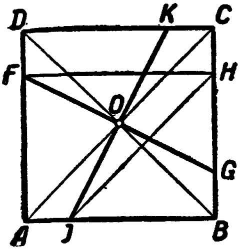
№ 2. — Дан параллелограм $ABCD$. Требуется через данную точку M провести прямую, параллельную данной прямой n (черт. 22).



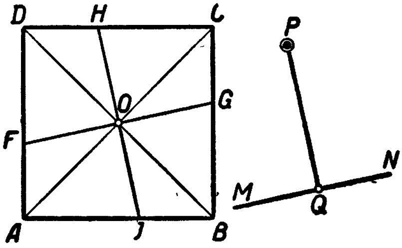
Черт. 22.

Проводим через O—точку пересечения диагоналей—прямую OK, параллельную одной из сторон параллелограма. На данной прямой n получаем три точки F, K, L — точки пересечения этой прямой с тремя параллельными прямыми DC, OK, AB, причем $FK = KL$. Задача сведена к задаче № 1 третьей темы. MN — искомая прямая.

№ 3. — Дан квадрат $ABCD$. Из O — центра квадрата — восставить перпендикуляр к произвольной прямой GOF (черт. 23).



Черт. 23.



Черт. 24.

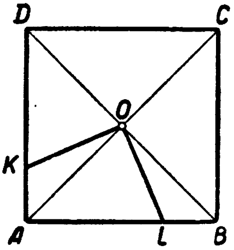
Проводим через точку F прямую FH, параллельную прямым AB и DC (задача № 3 темы третьей). Далее проводим прямую HJ, параллельную диагонали AC (задача № 1 темы третьей). Прямая JOK — искомая.

Действительно, $FD = HC = AJ$ (трапеция $ACHJ$ — равнобочная), $DO = AO$; $\angle FDO = \angle OAJ$. Следовательно, $\triangle DOF = \triangle AOJ$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle DOF = \angle AOJ$. Добавляя к каждому из этих углов $\angle AOF$, получим $\angle AOD = \angle JOF$, но $\angle AOD$ — прямой (диагонали квадрата взаимоперпендикулярны).

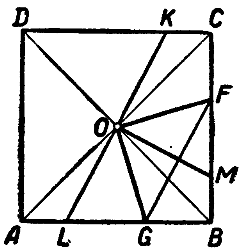
№ 4. — Дан квадрат $ABCD$ и произвольная прямая MN (черт. 24). Из точки P опустить перпендикуляр на прямую MN.

Проводим через O — центр квадрата — прямую FG, параллельную MN (задача № 2). Из центра O восставляем перпендикуляр JH к прямой GOF (задача № 3). Из точки P проводим прямую PQ, параллельную JOH (задача № 2).

№ 5. — Из точки O — центра квадрата — проведены две взаимноперпендикулярные прямые OK и OL, где K и L — точки на сторонах квадрата. Доказать, что $OK = OL$ (черт. 25).



Черт. 25.



Черт. 26.

Из равенства треугольников AOK и LOB ($AO = OB$; $\angle OAK = \angle OBL = 45°$, $\angle AOK = \angle LOB$, так как $\angle AOK = 90° - \angle AOL$; $\angle LOB = 90° - \angle AOL$) заключаем о равенстве отрезков $OL = OK$.

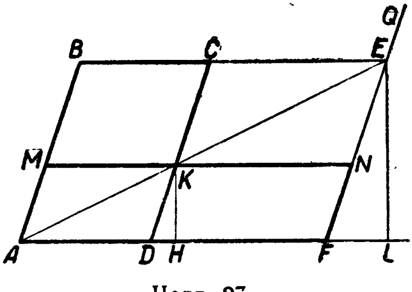
№ 6. — Дан прямой угол FOG с вершиной в центре квадрата. Построить биссектрису этого угла (черт. 26).

Проводим прямую FG. Через центр O квадрата проводим $KL \parallel FG$; $OM \perp KL$ — искомая биссектриса.

Действительно $OG = OF$ (задача № 4). Треугольник FOG — равнобедренный. $OM \perp FG$, следовательно, OM — биссектриса FOG.

№ 7. — Дан треугольник ABC и параллелограм $MNPQ$. Провести в треугольнике медиану AF (задача № 2 этой темы и задача № 1 — третьей темы).

№ 8. — Дан параллелограм $ABCD$. Превратить его в равновеликий параллелограм с основанием AF (черт. 27).



Черт. 27.

Из точки F проводим прямую FQ параллельно прямой AB. Продолжаем BC до пересечения в точке E с прямой FQ. Проводим AE до пересечения в точке K с прямой CD. Параллелограм $AMNF$—искомый.

Доказательство. Из подобия треугольников ADK и AEF имеем:

$$\frac{AD}{KH}=\frac{AF}{EL},$$

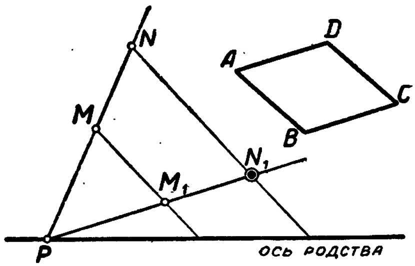
где KH и EL — сходственные высоты;

$$KH \cdot AF = AD \cdot EL = S.$$

№ 9. — В плоскости чертежа дан параллелограм $ABCD$. Построить точку N_1, родственную данной точке N, если дана ось родства и пара родственных точек M и M_1.

Родством называется преобразование, полученное в результате последовательного применения сначала сжатия к оси, затем сдвига относительно той же оси (или наоборот)[1].

Проводим прямую MN до пересечения в точке P (черт. 28) с осью родства. Через точку P проводим



Черт. 28.

прямую PM_1. Прямая, проведенная из точки N параллельно MM_1, пересечет прямую PM_1 в искомой точке N_1.

Наличие параллелограма позволяет провести прямую NN_1 одной линейкой.

№ 10. — Дан параллелограм $ABCD$. Построить точку, родственную точке N, если точка N лежит на пря-

[1] П. С. Моденов, Геометрические преобразования, журн. „Математика в школе", № 6, 1948.

мой MM_1, где M и M_1 — пара родственных точек, и если задана ось родства.

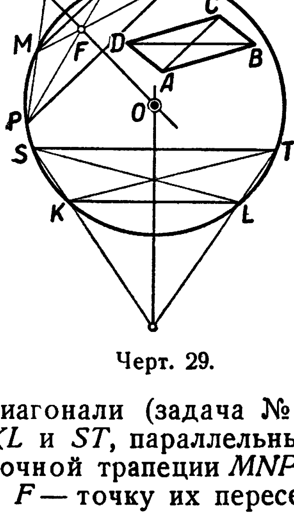
№ 11. — Дан параллелограм $ABCD$, точка M_1, родственная точке M—пересечения диагоналей параллелограма, и ось родства. Построить четырехугольник, родственный данному параллелограму.

Тема шестая

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ОКРУЖНОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ, ЕСЛИ В ПЛОСКОСТИ ЧЕРТЕЖА ДАНА ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ФИГУРА

Постановка задачи. Дана окружность с неизвестным центром. Определить ее центр одной линейкой.

В таком виде задача неразрешима. Математиком Гильбертом доказана невозможность отыскания центра окружности при помощи одной линейки без какихлибо вспомогательных фигур. Одно из доказательств невозможности отыскания центра дано в книге Радемахер и Теплиц, „Числа и фигуры", изд. ОНТИ, 1936, стр. 206 и в книге Г. Штейнгауз, „Математический калейдоскоп", изд. технико - теоретич. литературы, 1949, стр. 52.



Черт. 29.

Мы покажем, что при наличии некоторых вспомогательных фигур решение задачи возможно.

№ 1. — Определить центр круга, если в плоскости круга дан параллелограм.

Проводим диагонали параллелограма (черт. 29). Строим две хорды MN и PQ, параллельные одной диагонали (задача № 1 третьей темы), и две хорды KL и ST, параллельные другой диагонали. В равнобочной трапеции $MNPQ$ проводим диагонали PN и QM и F — точку их пересечения соединяем с H — точкой пересечения продолжений непараллельных сторон трапеции. Центр круга лежит на прямой FH, так как FH проходит через середины параллельных хорд. Строим вторую трапецию $KLST$. В этой трапеции строим прямую, на которой лежит центр круга. Точка пересечения этой прямой и прямой FH — искомый центр.

№ 2. — Определить центр круга, если в плоскости круга дана равнобедренная трапеция.

Проводим две прямые, параллельные основаниям трапеции и пересекающие данную окружность. Полученные хорды являются основаниями равнобедренной трапеции, вписанной в круг. Прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон построенной трапеции и через точку пересечения диагоналей, проходит через искомый центр. Проводим аналогичное построение в данной трапеции. Существование прямой, параллельной построенному диаметру, позволяет найти его середину. Решение невозможно, если осью симметрии данной трапеции является диаметр окружности.

№ 3. — Определить центр круга, если даны четыре последовательных вершины какого-либо правильного многоугольника. Соединив данные вершины, получим равнобедренную трапецию и приведем задачу к предыдущей.

Задача невозможна, если трапеция симметрична относительно диаметра. При пяти данных вершинах задача всегда возможна (всегда возможно выбрать подходящую равнобедренную трапецию).

Итак, центр круга может быть определен, если в плоскости круга расположен правильный n-угольник, когда $n > 3$.

№ 4. — Определить центр круга, если дан равносторонний треугольник и его центр.

Наличие центра равностороннего треугольника позволяет построить медианы треугольника. Основания двух медиан и соответствующие им вершины треугольника определяют равнобочную трапецию. Задача сведена к задаче № 1.

Задача всегда возможна, так как можно еще использовать прямую, проходящую через данный центр, и третью вершину.

№ 5. — Определить центр круга, если дан равнобедренный треугольник и середина его основания.

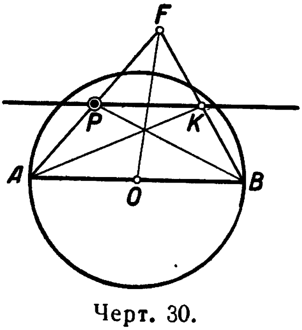
№ 6. — Определить центр круга, если дан равносторонний треугольник, сторона которого проходит через искомый центр.

ГЛАВА II

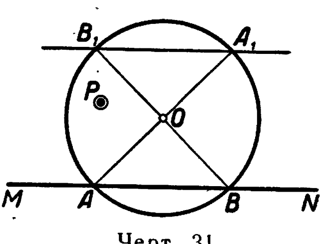
Тема седьмая

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ, ЕСЛИ В ПЛОСКОСТИ ЧЕРТЕЖА ДАН НЕПОДВИЖНЫЙ КРУГ И ЕГО ЦЕНТР

№ 1. — Через данную точку P провести прямую, параллельную диаметру данного круга, центр которого известен (черт. 30).



Черт. 30.



Черт. 31.

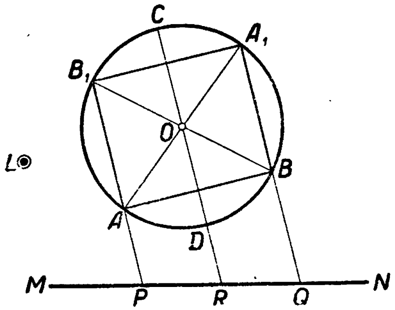
Известны три точки A, O, B диаметра AB; O—его середина. Задача сведена к задаче № 1 третьей темы.

№ 2. — Через данную точку P провести прямую, параллельную прямой MN, пересекающей данный круг (черт. 31) в точках A и B.

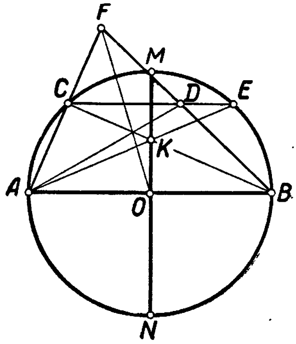
№ 3. — Через данную точку L провести прямую, параллельную данной прямой MN, проходящей вне данного круга (черт. 32).

Проводим произвольную хорду AB окружности и диаметры AA_1 и BB_1; они определят прямоугольник ABA_1B_1. Параллельно хордам A_1B и B_1A проводим диаметр CD. Продолжаем хорды AB_1, A_1B и диаметр CD до пересечения с данной прямой соответственно в точках P, R, Q. Точка R — середина отрезка PQ. Задача сведена к задаче № 1 третьей темы.

№ 4. — Построить диаметр, перпендикулярный данному диаметру AB (черт. 33).



Черт. 32.



Черт. 33.

Через произвольную точку C на окружности строим прямую $CD \parallel AB$ (задача № 1 темы третьей) и продолжаем ее до пересечения в точке E с окружностью. Через точку пересечения K диагоналей трапеции $ABEC$ проводим искомый диаметр MN.

Доказательство. Трапеция $ABEC$ равнобочна, следовательно, $KO \perp AB$.

Для построения диаметра, перпендикулярного данному, потребовалось провести восемь прямых.

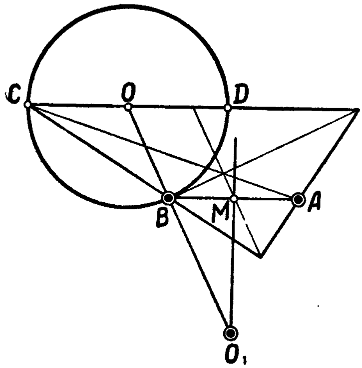
Задача о построении диаметра, перпендикулярного данному, может быть решена еще следующим образом: из произвольной точки вне или внутри круга опускаем перпендикуляр на диаметр (задача № 1 первой темы). Из центра проводим прямую, параллельную проведенному перпендикуляру (задача № 1 третьей темы).

№ 5. — Опустить перпендикуляр из данной точки на данную хорду.

Из концов данной хорды проводим диаметры и строим хорду, параллельную данной. Далее проводим диаметр, параллельный данной хорде (задача № 3 третьей темы). Задача сведена к задаче № 1 первой темы, если данная точка не лежит на окружности, и к задаче № 2 первой темы, если данная точка лежит на окружности.

№ 6. — Восставить к хорде в данной на ней точке перпендикуляр.

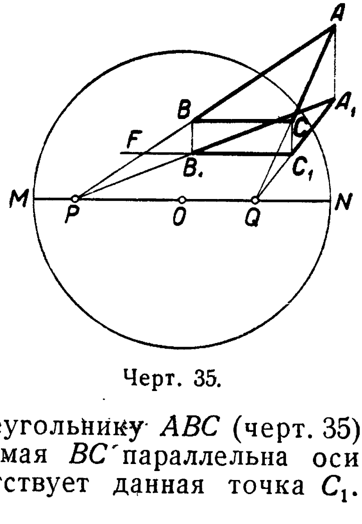
№ 7. — Через данную точку A провести окружность, касающуюся вспомогательной окружности в данной точке B (черт.34).



Черт. 34.

Окружность можно провести только циркулем. Мы будем считать окружность определенной, если дан ее центр и отрезок, равный радиусу. В задаче № 2 десятой темы мы покажем, что, зная центр окружности и отрезок, равный радиусу, мы сможем при помощи только одной линейки построить бесконечное множество точек окружности, т. е. построить окружность по точкам.

В данной задаче следует только найти центр искомой окружности. Центр искомой окружности лежит в точке пересечения прямой OB и перпендикуляра, восставленного из середины AB. Для определения точки M — середины отрезка AB — строим диаметр CD, параллельный прямой AB, и определяем середину отрезка AB (задачи № 2 седьмой темы и № 2 третьей темы). Из точки M опускаем перпендикуляр MO_1 на диаметр CD (задача № 1 темы первой). Точка O_1 — центр искомой окружности; O_1B — радиус.



Черт. 35.

№ 8. — Диаметр вспомогательного круга MN принять за ось сжатия. Построить треугольник $A_1B_1C_1$, соответственный данному треугольнику ABC (черт. 35) при сжатии к оси, если прямая BC' параллельна оси и если вершине C соответствует данная точка C_1.

Прямая, параллельная оси сжатия, переходит в параллельную прямую. Из точки C_1 проводим прямую C_1F, параллельную BC. Из точки B опускаем перпендикуляр на диаметр до пересечения в точке B_1 с прямой C_1F. Для отыскания точки A_1 следует найти точки пересечения прямых AB и AC с осью. Пусть это — точки P и Q. Точка A_1 — точка пересечения PB_1 и QC_1 — искомая.

№ 9. — Диаметр вспомогательного круга принят за ось родства. Построить треугольник $A_1B_1C_1$, родственный данному треугольнику ABC, если прямая BC параллельна оси родства и если вершине C соответствует точка C_1.

№ 10. — Дан круг, его диаметр MN и центр круга. Из концов диаметра проведены прямые MP и NQ, пересекающиеся внутри круга в точке A. На отрезках AM и AN взяты точки B и C. Установить сдвиг относительно диаметра так, чтобы треугольнику BAC соответствовал треугольник $B_1A_1C_1$ с прямым углом при вершине A_1.

№ 11. — В задаче № 10 заменить сдвиг сжатием к диаметру.

№ 12. — В задаче № 10 заменить сдвиг родством, если осью родства является данный диаметр и дано направление родства.

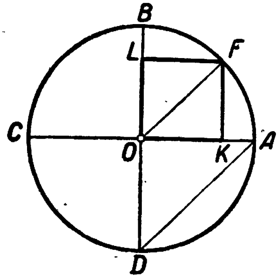
Тема восьмая

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ВПИСАННЫХ В КРУГ С ДАННЫМ ЦЕНТРОМ

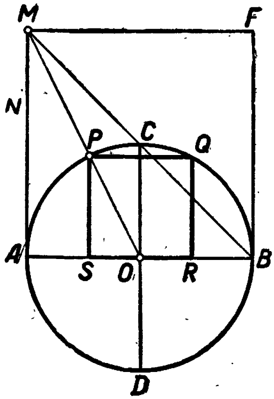
№ 1. — В квадрант AOB данного круга (черт. 36) вписать квадрат так, чтобы одна его вершина была на дуге, одна — в центре круга и две другие — на радиусах OA и BO.

Продолжаем радиус OB до пересечения в точке D с окружностью. Проводим прямую DA; из центра O проводим $OF \parallel DA$ (задача № 2 седьмой темы); точка F — вершина искомого квадрата. Проводим $FK \parallel BO$ и $FL \parallel AO$.

№ 2. — В полукруг данного круга вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на дуге, а две другие на диаметре полукруга (черт. 37).



Черт. 36.



Черт. 37.

Проводим диаметр DC, перпендикулярный диаметру AB (задача № 4 седьмой темы). Из точки A восставим перпендикуляр AN к диаметру AB (задача № 1 третьей темы). Далее проводим прямую BC до пересечения в точке M с прямой AN. Прямая OM пересечет полукруг в точке P, которая будет вершиной искомого квадрата. Квадрат $PQRS$ — искомый.

Действительно, $MA = AB$ по построению и фигура $MFBA$ — квадрат. Четырехугольник $PQRS$ подобен $MFBA$ и является искомым квадратом.

№ 3. — В данный круг вписать правильный треугольник.

Задача распадается на три элементарных задачи:

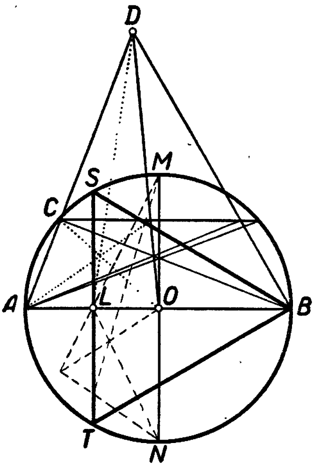
1) построение двух взаимно-перпендикулярных диаметров;

2) определение середины одного из построенных радиусов;

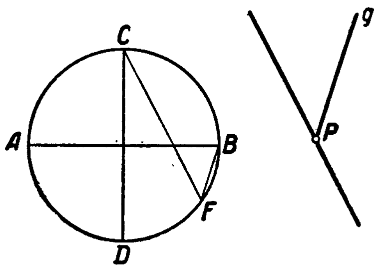
3) проведение через середину радиуса прямой, параллельной другому диаметру.

Для решения первой задачи требуется провести 9 прямых (задача № 4 седьмой темы). Далее проводим еще три прямых (на черт. 38 они проведены точечным пунктиром) для деления радиуса AO на две равные части в точке L. Для построения стороны ST правильного треугольника следует провести еще шесть прямых. Наконец, проводим две прямых, соединяющих конец B диаметра AB с точками T и S.

Итак, всего для построения требуется провести $9+3+6+2$ прямых, т. е. 20 прямых.



Черт. 38.



Черт. 39.

№ 4. — В данный круг вписать правильный шестиугольник.

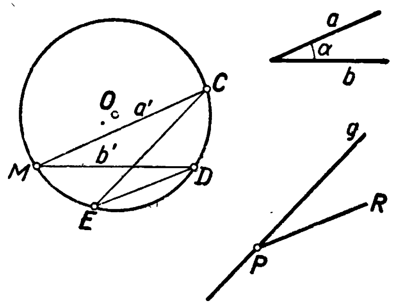
№ 5. — В точке P на данной прямой g построить угол, равный 45°, если в плоскости чертежа дана вспомогательная окружность с известным центром (черт. 39).

Приводим два взаимно-перпендикулярных диаметра (задача № 4 седьмой темы). Из конца B одного диаметра проводим хорду BF параллельно прямой g; $\angle CFB = 45°$ (измеряется половиной дуги в 90°).

Через точку P проводим прямую, параллельную CF.

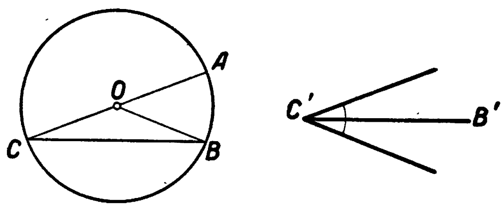
№ 6. Дана вспомогательная окружность и произвольный угол α. Построить на прямой g при данной точке P угол, равный α (черт. 40) (обобщение задачи № 5).

Через произвольную точку M окружности проводим прямые a' и b', параллельные сторонам данного угла, до пересечения в точках C и D с окружностью. Из точки C проводим прямую CE, параллельную данной прямой g. $\angle CED = \alpha$. Через точку P проводим прямую PR, параллельную ED.



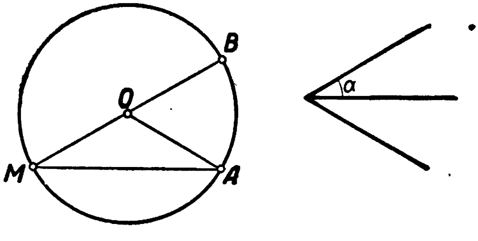
Черт. 40.

№ 7. — Дана вспомогательная окружность. Построить биссектрису данного угла (черт. 41).



Черт. 41.

Через центр окружности O проводим прямые AC и OB, параллельные сторонам данного угла, и проводим хорду CB. Из вершины данного угла следует



Черт. 42.

провести прямую $C'B'$, параллельную CB. Эта прямая — искомая биссектриса.

№ 8. — Дана вспомогательная окружность. Удвоить данный угол (черт. 42).

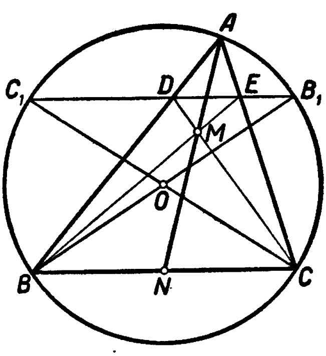
Строим диаметр BM, параллельный одной стороне угла, и хорду MA, параллельную другой стороне угла. $\angle BOA = 2\alpha$, где α — данный угол. Из вершины данного угла проводим прямую, параллельную OA.

Тема девятая

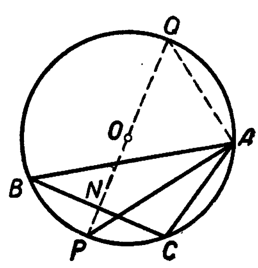
ПОСТРОЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ОДНОЙ ЛИНЕЙКИ РАЗЛИЧНЫХ ПРЯМЫХ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ, ЕСЛИ ДАН КРУГ, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ИЗВЕСТЕН ЕГО ЦЕНТР

№ 1. — Провести медиану из вершины A треугольника ABC, вписанного в данный круг.

Из вершин B и C (черт. 43) проводим диаметры BB_1 и CC_1. Строим хорду B_1C_1, пересекающую сторону AC в точке E и сторону AB в точке D. Проводим BE и CD и определяем их точку пересечения M. AMN — искомая медиана треугольника.



Черт. 43.



Черт. 44.

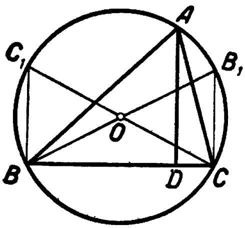
№ 2. — Провести биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC, вписанного в круг (черт. 44).

Построим точку N — середину стороны BC (задача № 1). Прямая ON разделит дугу BC в точке P на равные части. AP — искомая биссектриса.

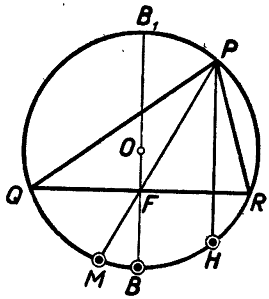
№ 3. — Из вершины A треугольника ABC, вписанного в данный круг, провести высоту треугольника (черт. 45).

Проводим диаметры BB_1 и CC_1. Прямые C_1B и B_1C параллельны искомой высоте. Задача сведена к задаче № 3 третьей темы.

№ 4. — Определить центр круга, вписанного в треугольник, если дан центр круга, описанного около треугольника.



Черт. 45.



Черт. 46.

№ 5. — Дана окружность и три точки на ней B, M и H. Построить вписанный в эту окружность треугольник, для которого данные точки служат соответственно точками пересечения с окружностью биссектрисы, медианы и высоты, проведенных из одной вершины (черт. 46).

Решение. Центр окружности O соединяем с точкой B (через точку B проходит биссектриса). Из точки H проводим прямую HP, параллельную диаметру BB_1 (задача № 1 третьей темы). Точка P — вершина искомого треугольника. Прямая PM пересечет OB в точке F — середине стороны искомого треугольника. Из точки F восставляем перпендикуляр к диаметру BB_1. Точки Q и R — точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью — служат двумя другими вершинами треугольника.

Тема десятая

ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕНИЙ, ПРОИЗВОДИМЫХ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ, ЕСЛИ В ПЛОСКОСТИ ЧЕРТЕЖА ДАН НЕПОДВИЖНЫЙ КРУГ И ЕГО ЦЕНТР

Докажем, что всякая задача, решаемая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если в плоскости чертежа дан неподвижный круг и его центр.

Рассмотрим подробнее, что значит решить задачу с помощью циркуля и линейки.

Решить задачу с помощью циркуля и линейки— значит свести ее к выполнению точно определенного конечного числа следующих построений:

a) проведение прямой линии через две известные точки;

b) определение точки пересечения двух известных прямых;

c) проведение окружности с известным центром и известным радиусом;

d) определение точек пересечения известной прямой и известной окружности;

e) определение точек пересечения двух известных окружностей.

Эти пять построений можно было бы назвать элементарными операциями.

При решении задачи с помощью циркуля и линейки мы в рамках геометрической части решения не задаемся вопросом о том, как именно выполняется каждая из операций a)—e); мы просто считаем, что эти операции мы умеем выполнить.

Данная выше формулировка определения элементарных операций требует еще пояснения. В эту формулировку входит термин „известный“ (известная точка, известная прямая, известная окружность). Под словом „известный“ понимаются здесь такие элементы, которые либо даны в условии задачи, либо уже определены в результате предыдущих операций, либо, наконец, выбираются произвольно[1].

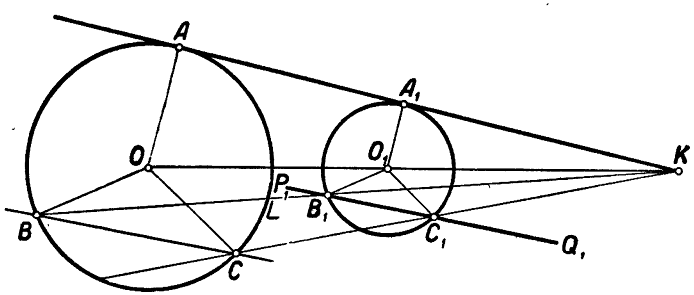
---

[1] Д. И. Перепелкин, Геометрические построения в средней школе, изд. АПН, 1947.

Мы привели эту выдержку из книги Д. И. Перепелкина с целью подчеркнуть разницу в построениях линейкой и циркулем и одной линейкой. При построении одной линейкой мы должны показать, как действительно выполняются операции а)—е) (мы не можем просто считать, что эти операции мы умеем выполнять).

Операции а) и в) выполняются одной линейкой и потому в наших построениях не вызывают затруднений. Иначе обстоит дело с операциями с), д), е). Для их выполнения необходимы линейка и циркуль. Мы должны показать, что наличие круга с данным центром позволяет отказаться от пользования циркулем.

Прежде чем дать фактическое выполнение одной линейкой операций с) и d), произведем одно вспомогательное построение.



Черт. 47.

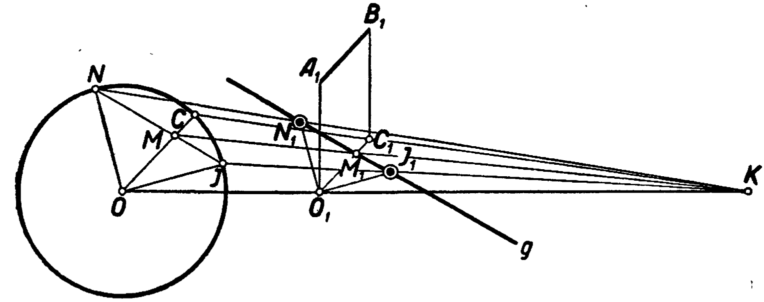
Пусть даны две окружности O и O_1 (черт. 47). Проведем их общую внешнюю или внутреннюю касательную (на чертеже проведена внешняя касательная) до пересечения в точке K с линией центров. Точка K— внешний центр подобия кругов O и O_1. Пересечем круг O_1 произвольной прямой P_1Q_1. Пусть B_1 C_1— точки пересечения этой прямой с окружностью O_1. Построим точки B и C окружности O соответственные точкам B_1 и C_1 окружности O_1. Построение может быть проведено двумя способами.

1) Проводим радиус OB, параллельный O_1B_1. Точка B—искомая. Аналогично строится точка C.

2) Проводим прямую KB_1 до пересечения с окружностью O в точках B и L; B—точка, соответственная точке B_1. Аналогично определяется точка C.

Итак, точка B, находящаяся на окружности O, лежит в пересечении двух прямых OB и KB.

№ 1. — Определить точки пересечения данной прямой g и окружности, заданной положением ее центра O_1, и длиной радиуса, равной данному отрезку A_1B_1 (предполагается, конечно, данной вспомогательная окружность с центром O) (черт. 48).



Черт. 48.

Строим параллелограм $O_1A_1B_1C_1$ и проводим радиус вспомогательной окружности $OC \parallel O_1C_1$. Точка K — точка пересечения прямых OO_1 и CC_1 — внешний центр подобия окружностей O и O_1. Определим M_1—точку пересечения прямой O_1C_1 и данной прямой g. Проводим прямую KM_1 и на ней находим точку M, соответственную точке M_1. Точка M лежит в пересечении прямой KM_1 и радиуса OC. Из точки M проводим прямую NJ, параллельную прямой g, и определяем N и J — точки ее пересечения с вспомогательной окружностью. Прямые KN и KJ определяют точки N_1 и J_1 пересечения с прямой g с окружностью O_1.

Решить эту задачу, заменив внешний центр подобия кругов внутренним.

Указание. Радиус OC на чертеже 48 заменить радиусом OC', являющимся продолжением OC.

Перейдем к обоснованию операции с).

№ 2. — Дан вспомогательный круг и круг, заданный своим центром O_1 и длиной радиуса, равной отрезку

A_1B_1. Построить одной линейкой точки круга O_1 [операция с)].

Строим параллелограм $O_1A_1B_1C_1$ (черт. 48). Проводим из центра O вспомогательной окружности радиус $OC \parallel O_1C_1$. Строим точку K — внешний центр подобия кругов O и O_1. Взяв произвольную точку N на окружности O, построим ей соответственную точку N_1 на окружности O_1.

Итак, не пользуясь циркулем, при данных задачи, можно построить бесчисленное количество точек окружности O_1.

№ 3. — В окружности, заданной положением центра O_1 и длиной радиуса, равной данному отрезку A_1B_1, провести хорду, для которой данная точка C_1 была бы серединой.

Решение. Строим внешний или внутренний центр подобия кругов вспомогательного и данного (задача № 1). Пусть это будет точка K. Далее находим точку C внутри вспомогательного круга, соответственную точке C_1. Проводим через C хорду, для которой C — середина.

Заключение. Решение задачи № 1 этой темы показывает, что при наличии круга с данным центром возможно определить точки пересечения прямой и окружности, заданной положением ее центра и длиной радиуса, равной данному отрезку.

Решение задачи № 2 показывает, что при наличии вспомогательного круга с данным центром можно построить бесконечное множество точек окружности, заданной своим центром и радиусом, пользуясь исключительно линейкой, иначе говоря, можно при помощи линейки строить окружность по точкам.

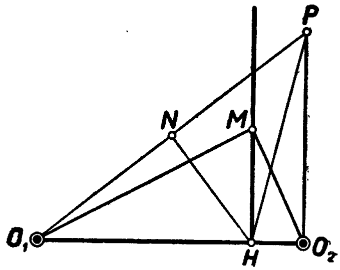
Тема одиннадцатая

ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕНИЙ, ПРОИЗВОДИМЫХ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ, ЕСЛИ В ПЛОСКОСТИ ЧЕРТЕЖА ДАН НЕПОДВИЖНЫЙ КРУГ И ЕГО ЦЕНТР (продолжение)

Осталось показать, что операция e) — определение точек пересечения двух окружностей, из которых каждая задана своим центром и отрезком, равным радиусу, может быть решена одной линейкой.

Предварительно остановимся на некоторых вопросах, связанных с геометрией кругов, а потом решим одну вспомогательную задачу.

1. Вспомним, что геометрическое место точек, разность квадратов расстояний каждой из которых до двух данных точек есть величина постоянная (равная квадрату данного отрезка), есть прямая, перпендикулярная к прямой, проходящей через данные точки.



Черт. 49.

Действительно, пусть O_1 и O_2 — данные точки и пусть M—точка, принадлежащая искомому геометрическому месту (черт. 49), и a—величина данного отрезка. Имеем $MO_1^2 - MO_2^2 = a^2$. Угол при вершине O_1 треугольника MO_1O_2—острый, а потому H—основание перпендикуляра из точки M на прямую O_1O_2, и точка O_2 лежит по одну сторону от точки O_1; следовательно

$$MO_1^2 = MH^2 + O_1H^2, \quad MO_2^2 = MH^2 + O_2H^2;$$

отсюда

$$MO_1^2 - MO_2^2 = O_1H^2 - O_2H^2; \; O_1H^2 - O_2H^2 = a^2.$$

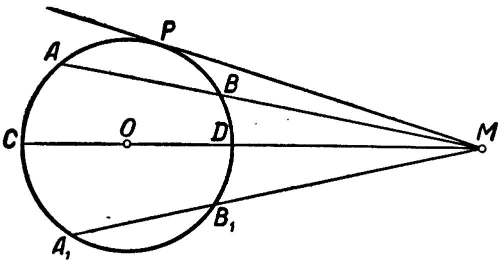
Итак, точка H принадлежит искомому геометрическому месту. Легко видеть, что искомым геометрическим местом является перпендикуляр к прямой O_1O_2 в точке H. Задача состоит в отыскании точки H, для чего из точки O_2 восставляем перпендикуляр и на нем откладываем отрезок $O_2P = a$. Из N—середины O_1P — восставляем перпендикуляр NH до пересечения в точке H с O_1O_2. Легко видеть, что

$$O_1H^2 - O_2H^2 = HP^2 - O_2H^2 = a^2.$$

2. Несколько слов о степени точки относительно окружности.

Предположим, что из данной точки M, лежащей вне круга, проведены прямые, пересекающие данную окружность O (черт. 50). Тогда имеем:

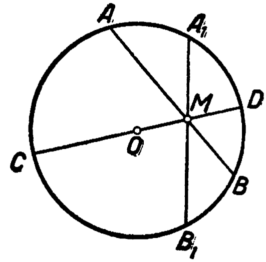
$$MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = MP^2 = MC \cdot MD =$$
$$= (d+r)(d-r) = d^2 - r^2,$$



Черт. 50.

где: d — расстояние от центра окружности до данной точки, r — радиус окружности.

Предположим, что из данной точки M, лежащей внутри круга (черт. 50а), проведены прямые, пересекающие данную окружность O. Тогда имеем:



Черт. 50а.

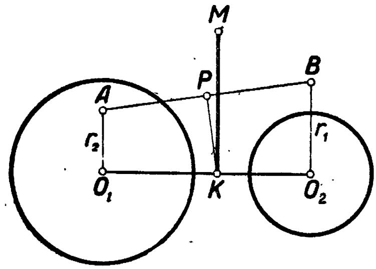
$$MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = MC \cdot MD =$$
$$(r+d)(r-d) = r^2 - d^2 =$$
$$= -(d^2 - r^2).$$

Число $d^2 - r^2$ (постоянное для данной точки) называется степенью точки относительно окружности и обозначается C_O^M. Степень точки, лежащей вне круга, положительна $(d > r)$. Степень точки, лежащей внутри круга, отрицательна $(d < r)$. Для точек окружности степень точки равна нулю.

3. Теперь перейдем к построению радикальной оси двух окружностей.

Определим геометрическое место точек, каждая из которых имеет относительно двух данных окружностей равные степени. На черт. 51 изображены две данные окружности O_1 и O_2. Пусть M — точка плоскости, принадлежащая геометрическому месту. Тогда имеем:

$$C_{O_1}^M = d_1^2 - r_1^2;\ C_{O_2}^M = d_2^2 - r_2^2,$$



Черт. 51.

где: d_1, d_2—соответственно расстояния от данной точки до центров окружности, а r_1 и r_2—радиусы этих окружностей. Из равенства $C_{O_1}^M = C_{O_2}^M$ следует

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

или

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \mathrm{Const}.$$

Таким образом, искомым геометрическим местом является прямая, называемая радикальной осью.

Построим радикальную ось двух непересекающихся окружностей, центры которых даны и радиусы которых известны. Пусть даны окружности O_1 и O_2, радиусы которых соответственно равны r_1 и r_2 (черт. 51.) Восставляем в точках O_1 и O_2 перпендикуляры к линии центров. На перпендикуляре, восставленном в точке O_1, отложим отрезок $O_1A = r_2$, а на перпендикуляре, восставленном в точке O_2, отрезок $O_2B = r_1$. Из середины AB восставим перпендикуляр PK до пересечения в точке K с линией центров O_1O_2. Прямая KM, перпендикулярная к O_1O_2, — радикальная ось.

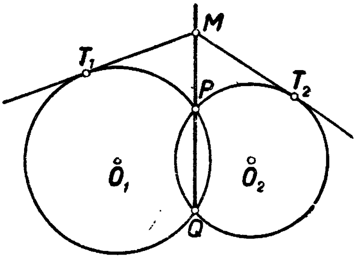
Доказательство. $KA = KB$. Следовательно, $KA^2 = KB^2$, т. е.

$$r_2^2 + d_1^2 = r_1^2 + d_2^2,\quad \text{где } d_1 = O_1K;\ d_2 = O_2K.$$

В случае пересечения окружностей их радикальной осью является общая секущая. Действительно, пусть

M — точка, лежащая (черт. 52) на общей секущей, тогда $MT_1^2 = MQ \cdot MP$ и $MT_2^2 = MQ \cdot MP$. Следовательно, $MT_1 = MT_2$ и точка M лежат на радикальной оси.

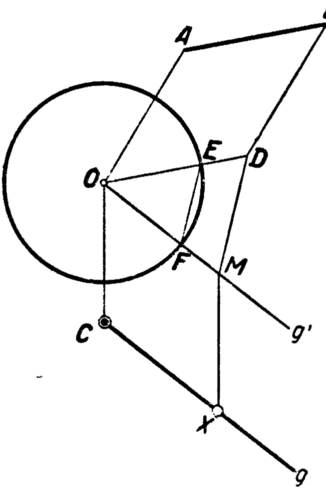
Таким образом, для двух пересекающихся окружностей радикальная ось легко строится одной линейкой (см. введение, задача № 2).



Черт. 52.

Итак, отыскание точек пересечения двух окружностей сводится к отысканию точек пересечения одной из окружностей с радикальной осью.

Вспомогательная задача № 1. — Даны окружность и ее центр, отрезок AB, прямая g и на ней точка C; требуется построить на прямой g точку X так, чтобы выполнялось равенство $CX = AB$ (черт. 53).



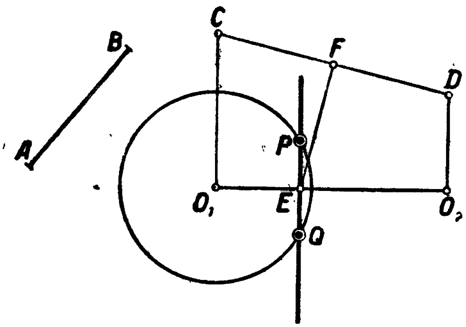
Черт. 53.

Строим параллелограм $OABD$. Из точки O проводим прямую $g' \parallel g$. Проводим EF, где E — точка пересечения OD с окружностью, F — точка пересечения прямой g' с окружностью. Из точки D проводим $DM \parallel EF$. Легко видеть, что отрезок OM равен AB. Действительно, треугольник ODM подобен треугольнику OEF, в котором $OE = OF$, следовательно, $OM = OD = AB$.

Итак, отрезок AB отложен от точки O на прямой g'. Остается перенести отрезок OM на прямую g; для этого проводим OC и из точки M прямую MX, параллельную OC.

№ 2. — Найти точки пересечения вспомогательного круга O_1 и круга O_2, заданного своим центром и отрезком AB, равным его радиусу (черт. 54).

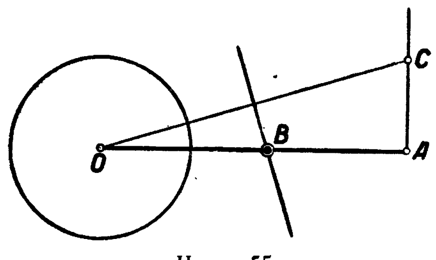
В точках O_1 и O_2 восставляем к прямой O_1O_2 перпендикуляры и на них откладываем отрезки $O_1C = AB$ и O_2D, равный радиусу вспомогательного круга; эти операции могут быть выполнены одной линейкой



Черт. 54.

(предыдущая задача). Из середины CD восставляем перпендикуляр до пересечения в точке E с линией центров. В точке E восставляем перпендикуляр к линии центров. PQ — радикальная ось, следовательно, P и Q — искомые точки.

№ 3.—На данной прямой OA найти точку B, чтобы длина касательной из этой точки к окружности O была равна отрезку BA (черт. 55).

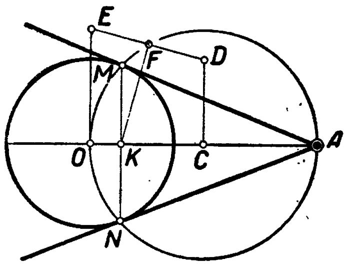


Черт. 55.

Рассмотрим точку A как окружность нулевого радиуса; тогда точка B должна лежать на радикальной оси вспомогательной и „нулевой" окружностей.

Для отыскания точки B восставляем в точке A перпендикуляр к линии центров и на нем откладываем $AC = r$ — радиусу вспомогательной окружности. Перпендикуляр, восставленный в середине OC, пересечет AO в искомой точке B.

Действительно, $BA = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{BC^2 - r^2} = \sqrt{OB^2 - r^2} = t$, где t — длина касательной.



Черт. 56.

№ 4. — Из данной точки A, лежащей вне вспомогательного круга, провести касательную к этому кругу (черт. 56).

При решении задачи циркулем и линейкой мы на OA, как на диаметре, строим окружность. Точки пересечения данной окружности и искомой определят точки касания.

При построении одной линейкой мы должны, если использовать то же построение, поступить следующим образом: из точки C—середины OA восставить перпендикуляр к OA и на перпендикуляре отложить отрезок CD, равный радиусу вспомогательной окружности, а на перпендикуляре OE отложить отрезок $OE = OC$. Из F — середины ED следует провести $FK \perp ED$ до пересечения в точке K с прямой OA. Из точки K восставить перпендикуляр MKN к прямой OA. Точки M и N — искомые точки касания. Построение сложно. В двадцать второй теме будет дан простой способ решения этой задачи одной линейкой.

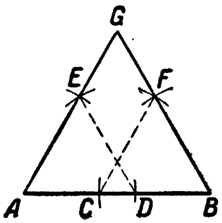
Тема двенадцатая

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ И ЦИРКУЛЕМ ПРИ НЕИЗМЕННОМ РАСТВОРЕ

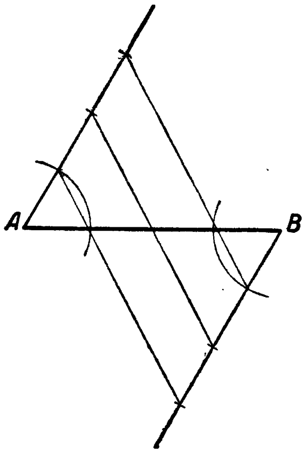
В темах десятой и одиннадцатой было показано, что все задачи, решаемые циркулем и линейкой, могут быть решены одной линейкой при наличии неподвижного круга с заданным центром. Отсюда следует, что все задачи, решаемые циркулем и линейкой, могут быть решены одной линейкой и циркулем при неизменном растворе.

№ 1.—На стороне AB построить равносторонний треугольник, пользуясь одной линейкой и циркулем при неизменном растворе.

Из точек A и B (черт. 57) сделаем на прямой засечки данным неизменным радиусом соответственно в точках D и C; на AD и BC строим, пользуясь циркулем при постоянном растворе, равносторонние треугольники AED и BFC; их стороны AE и BF пересекутся в точке G так, что ABG—искомый треугольник.



Черт. 57.



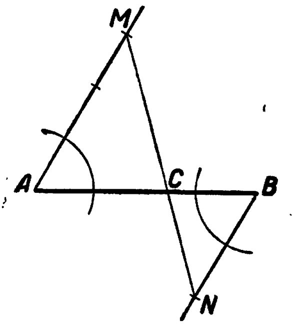
Черт. 58.

№ 2. — Требуется разделить отрезок AB на n равных частей, пользуясь одной линейкой и циркулем при неизменном растворе.

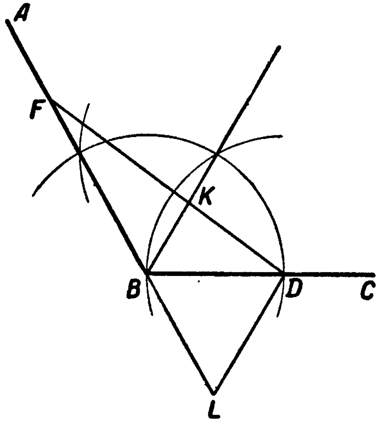
По разные стороны данной прямой строим при A и B углы в 60° так, чтобы вторые стороны этих углов были параллельны (черт. 58). Отложив на этих сторонах по $n-1$ отрезку, равных данному радиусу, соединим соответственные точки прямыми. Проведенные прямые разделят данный отрезок, как легко видеть, на n равных частей.

№ 3. — Разделить данный отрезок в отношении $\frac{m}{n}$ (где m и n—целые числа), пользуясь линейкой и циркулем при неизменном растворе.

Разделим отрезок AB в отношении $\frac{3}{2}$ (черт. 59). Для этого проводим из точек A и B прямые под углом в 60° к AB, как показано на чертеже, и откладываем на одной прямой последовательно 3 отрезка, каждый из которых равен данному радиусу (в общем случае откладываем m отрезков), а на другой — два отрезка (в общем случае — n отрезков). Проведя отрезок MN (AM равно 3 радиусам, BN — двум радиусам), разделим AB в точке C так, что $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{2}$.



Черт. 59.



Черт. 60.

Докажем теорему, которую в дальнейшем используем для решения задач одной линейкой и циркулем при постоянном растворе.

Теорема. Если на сторонах угла в 120° отложить соответственно отрезки $BD=\frac{a}{n}$ и $BF=\frac{a}{m}$, то прямая DF пересечет биссектрису угла ABC в точке K так, что $BK=\frac{a}{m+n}$ (черт. 60).

Доказательство.

Проведем $DL \parallel BK$. Треугольник DLB — равносторонний.

Из подобия треугольников DLF и BFK следует:

$$\frac{DL}{BK}=\frac{LF}{BF};$$

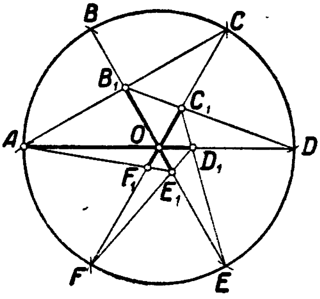
пусть $BK = x$; тогда

$$\frac{a}{nx} = \frac{\frac{a}{m} + \frac{a}{n}}{\frac{a}{m}}; \quad x = \frac{a}{m+n}.$$

№ 4. — По данному отрезку a построить последовательно $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{n}$, пользуясь линейкой и циркулем при растворе, равном a (черт. 61).

Строим окружность O радиуса a и откладываем от произвольной точки окружности радиус шесть раз.

$$\angle AOC = \angle BOD = \angle COE = \angle EOA = 120°.$$



Черт. 61.

Прямая AC разделит пополам радиус OB в точке B_1, $OB_1 = \frac{a}{2}$. Прямая DB_1 пересечет OC в точке C_1 так, что $OC_1 = \frac{a}{3}$. Прямая EC_1 пересечет OD в точке D_1 так, что $OD_1 = \frac{a}{4}$ и т. д.

Тема тринадцатая

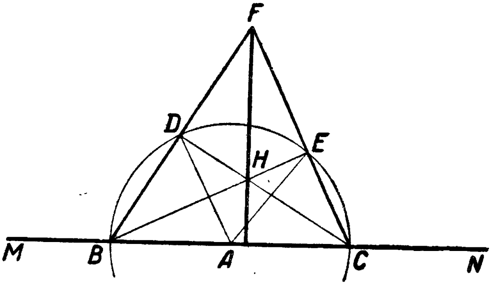
ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ И ЭТАЛОНА ДЛИНЫ

Пусть, кроме линейки, имеется еще инструмент, эталон длины — дающий возможность откладывать определенный отрезок на данной или построенной прямой от данной на ней точки (например, имеется бумажная полоска определенной длины). Вращение эталона длины вокруг одного из его концов не дозволяется (эталон длины — не циркуль при данном растворе). Покажем, что, пользуясь линейкой и этим инструментом, мы сможем решить ряд задач второй степени, вместе с тем мы увидим, что не всякая задача, решаемая циркулем и линейкой, может быть решена с помощью линейки и эталона длины.

№ 1. — Из данной точки A провести прямую, параллельную данной прямой MN.

Пусть длина эталона равна a. На прямой MN от произвольной точки B последовательно откладываем два отрезка $BC = a$ и $CD = a$. На прямой MN имеем отрезок BD, середина которого C известна. Задача сведена к задаче № 1 темы третьей.

№ 2. — Провести прямую перпендикулярно к данной прямой (черт. 62).



Черт. 62.

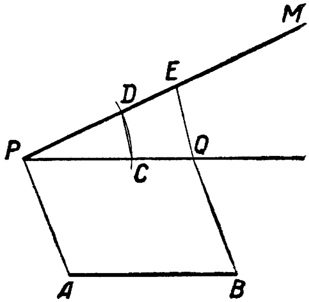
Пусть MN — данная прямая, A — произвольная точка этой прямой. Отложим с помощью эталона длины на прямой MN по обе стороны от точки A отрезки $AB = AC = a$. Из точки A проведем две произвольные прямые и на каждой из них отложим от точки A отрезки $AD = AE = a$. Прямые BD и CE пересекаются в точке F, прямые BE и CD пересекаются в точке H. Прямая FH перпендикулярна к MN.

Действительно точки B, D, E, C лежат на окружности с центром в точке A радиуса a. Углы BDC и BEC, опирающиеся на диаметр, — прямые, а потому BE и CD — высоты треугольника BFC. Отсюда $FH \perp BC$.

№ 3. — Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую.

№ 4. — Данный отрезок отложить на данной прямой от некоторой точки по данную сторону от этой точки.

Пусть AB — отрезок (черт. 63), который требуется отложить на данной прямой PM от точки P. Из точки P проводим прямую, параллельную AB, и с помощью эталона длины откладываем на ней отрезок $PC = a$. Далее, на прямой PM откладываем отрезок $PD = a$. Проводим прямую CD. Из точки B проводим прямую, параллельную AP, до пересечения в точке Q с прямой PC. Из точки Q проводим прямую, параллельную CD, до пересечения в точке E прямой PM. Отрезок PE равен отрезку AB.



Черт. 63.

№ 5. — Дана прямая AB и окружность своим центром O и радиусом, равным отрезку CD. Узнать, пересекает ли прямая AB окружность?

Из центра O опускаем на AB перпендикуляр OF и на OF откладываем от точки O отрезок OE, равный CD — радиусу данной окружности. Если $OE < OF$, то прямая не пересекает окружности, если $OE = OF$, то прямая касается окружности и если $OE > OF$, то прямая пересекает окружность.

№ 6. — Найти точки пересечения прямой с окружностью, заданной своим центром и радиусом, равным данному отрезку.

Эта основная задача (см. десятую тему, задача „d“) не может быть решена помощью линейки и эталона длины. Предыдущая задача позволяет решить вопрос о том, пересекает ли данная прямая окружность. Определить точки пересечения не представляется возможным, так как мы не можем из центра окружности засечь данную прямую радиусом, равным радиусу данной окружности (вращать эталон длины не дозволяется).

№ 7. — Можно ли построить линейкой и эталоном длины прямоугольный треугольник по катетам? по гипотенузе и катету?

№ 8. — Решить при помощи линейки, на которой нанесены две произвольные пометки, задачи № 1, 2, 3, 4 этой темы.

№ 9. — Показать, что если на линейке нанесены две произвольные пометки, то без циркуля можно построить $\frac{1}{n}$ часть данного отрезка.

№ 10. — Показать, что если дана ось родства и две родственных точки, то точку, родственную данной. можно построить одной линейкой, на которой нанесены две произвольные пометки.

Часть II — ГЕОМЕТРИЯ ЦИРКУЛЯ

ГЛАВА III

Тема четырнадцатая

ПОНЯТИЕ О ГЕОМЕТРИИ ЦИРКУЛЯ

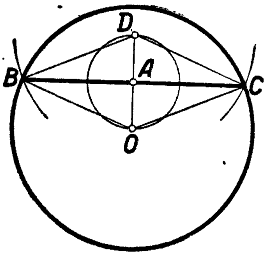
В первой части книги было показано, что *всякая* задача, решаемая циркулем и линейкой, не может быть решена одной линейкой, если не дана вспомогательная фигура. Мы видели, что решение задач одной линейкой всегда выполнимо, если в плоскости чертежа дан круг и его центр. Итак, совершенно изъять циркуль невозможно. Поставим следующий вопрос: возможно ли при построениях обойтись без линейки и решать задачи исключительно циркулем? Возникновение такого вопроса оправдано хотя бы тем, что нам известны задачи на построение из курса элементарной геометрии, решаемые исключительно циркулем, например деление окружности на шесть и на три равные части.

Деление окружности на три равные части позволяет решить одним циркулем следующую задачу: построить точку, диаметрально противоположную данной точке окружности, и, следовательно, найти диаметр окружности. Отложив от данной точки последовательно три дуги радиусом, равным радиусу окружности, мы найдем искомую точку.

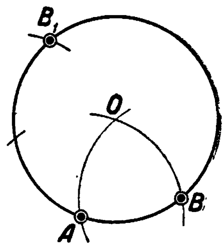
Построение одним циркулем точки, диаметрально противоположной данной точке, дает возможность легко решить одним циркулем много интересных задач. Приведем несколько задач, легко решаемых одним циркулем.

№ 1. — Через данную точку внутри круга провести хорду, делящуюся в данной точке на равные части.

Предположим, что задача решена и что хорда BC (черт. 64) делится в данной точке A пополам. Продолжив OA на свою длину до точки D и соединив точку D с точками C и B, получим ромб $OBDC$, следовательно, $BD = DC$, а сторона ромба равна радиусу окружности. Отсюда следует построение. Из данной точки A радиусом OA проводим окружность и строим точку D, диаметрально противоположную точке O. Из точки D радиусом, равным радиусу данной окружности, засекаем данную окружность в точках B и C. Хорда BC — искомая.



Черт. 64.



Черт. 65.

№ 2. — Из данной точки A восставить перпендикуляр к прямой, заданной двумя своими точками A и B.

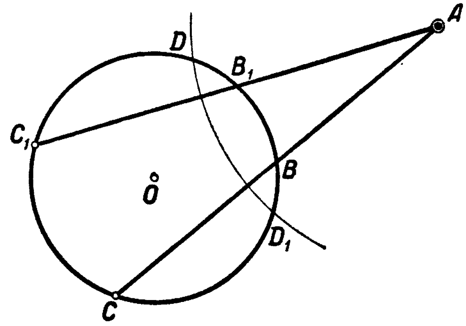
Остановимся несколько подробнее на этой задаче.

Во-первых, обратим внимание на способ задания прямой. Прямая задана двумя своими точками. При таком способе задания надо быть уверенным в том, что мы можем построить циркулем бесконечное множество точек прямой. В следующей теме мы покажем (задача № 5) возможность такого построения.

Во-вторых, мы увидим, что решение задачи будет произведено при неизменном растворе циркуля, что делает построение простым и изящным.

Для решения задачи из точек A и B радиусом, равным AB, проведем дуги до пересечения в точке O (черт. 65). Из O радиусом AB проведем окружность и построим на ней точку B_1, диаметрально противоположную точке B. Прямая AB — искомый перпендикуляр ($\angle BAB_1$, опирающийся на диаметр BB_1, — прямой).

№ 3. — Из заданной точки A вне данного круга провести секущую так, чтобы ее внешняя часть была равна внутренней.

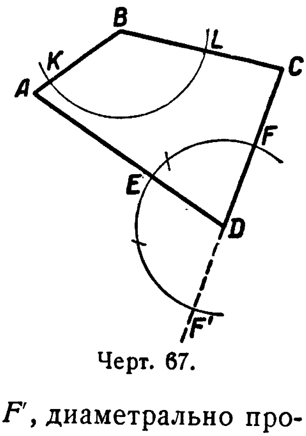


Черт. 66.

Пусть ABC — искомая секущая (черт. 66). Построим точку D, диаметрально противоположную точке C. Треугольник ADC—равнобедренный (BD—высота и медиана, а потому $AD = DC$).

Выполним построение, пользуясь одним циркулем. Из точки A радиусом, равным диаметру круга, проводим DD_1. Далее строим точку C (и соответственно C_1), диаметрально противоположную точке D (и соответственно D_1); AC и AC_1 — искомые секущие. Задача имеет два, одно или ни одного решения.

№ 4. — Пользуясь одним циркулем, узнать, можно ли около данного выпуклого четырехугольника описать окружность.



Черт. 67.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (черт. 67). Из точки B, как из центра, произвольным радиусом проводим дугу, пересекающую стороны BA и BC в точках K и L. Из вершины D тем же радиусом проводим дугу, пересекающую стороны DA и DF в точках E и F. Строим точку F', диаметрально противоположную точке F. В случае равенства отрезков KL и EF' около четырехугольника можно описать окружность, так как $\angle EDF' = \angle KBL$, а, следовательно,

$$\angle ABC + \angle EDF = 2d.$$

№ 5. — Между двумя окружностями дана точка A. Найти на окружностях точки X и Y так, чтобы отрезок XY делился в точке A пополам.

Приведенные задачи показывают возможность решения задач на построение исключительно циркулем. Как мы далее увидим, циркуль „сильнее" линейки. Всякая задача, решаемая циркулем и линейкой, может быть решена одним циркулем.

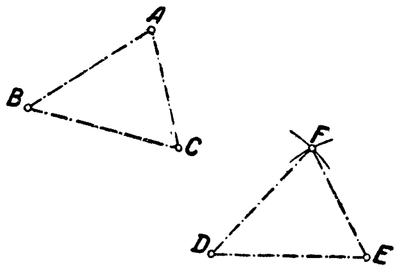
Вторая часть книги посвящена построениям одним циркулем. В ней, так же как и в первой части задачи сгруппированы по отдельным темам.

Тема пятнадцатая

ПОСТРОЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

При построении нами будет использован исключительно циркуль, при анализе решения и доказательстве мы будем проводить также и прямые линии.

Прямая циркулем не может быть построена, поэтому мы будем считать прямую определенной, если даны ее две точки. В этой теме мы покажем, что по двум точкам прямой можно построить циркулем бесконечное множество точек этой прямой (задача № 5).



Черт. 68.

№ 1. — Построить угол, равный данному углу ABC (черт. 68).

Строим отрезок $DE = BC$, т. е. циркулем отмечаем две точки D и E так, чтобы $DE = BC$. Вокруг точек D и E радиусами, соответственно равными AB и AC, строим дуги, пересекающиеся в точке F. Угол FDE — искомый. Равенство углов следует из равенства треугольников ABC и FDE.

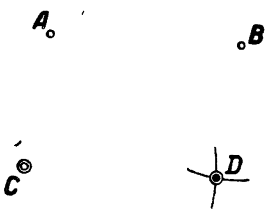
№ 2. — Из данной точки C провести прямую, параллельную AB (черт. 69).

Вокруг точки C радиусом AB проводим дугу. Из точки B засекаем дугу радиусом, равным AC. Точка D — точка пересечения дуг. Прямая CD — искомая.

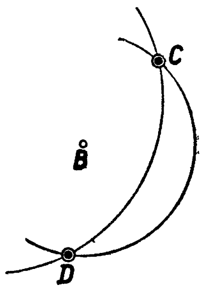
Доказательство.

$$\triangle ABC = \triangle BCD; \quad \angle ABC = \angle BCD;$$

$$AB \parallel CD.$$



Черт. 69.



Черт. 70.

№ 3. — Из данной точки C (черт. 70) опустить перпендикуляр на прямую AB.

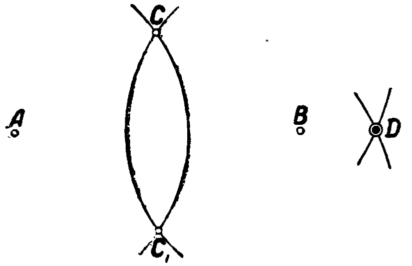
Из точек A и B проводим дуги радиусами AC и BC до пересечения в точке D. CD — искомый перпендикуляр.

№ 4. — Построить точку D, симметричную точке C относительно прямой AB (задача № 3).

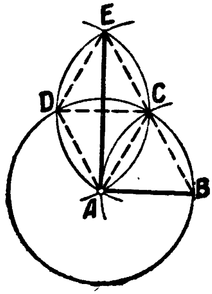
№ 5. — Даны две точки A и B. Построить точки, лежащие на прямой AB (черт. 71).

Для произвольной точки C, лежащей вне прямой AB, строим точку C_1, симметричную точке C относительно AB. Из точек C и C_1 проводим дуги произвольными равными радиусами до пересечения их в точке D. Точка D лежит на данной прямой. Таким образом можно построить бесконечное множество точек.

Эта задача имеет важное принципиальное значение. Не имея линейки — инструмента для проведения прямой, — мы строим прямую циркулем „по точкам“.



Черт. 71.



Черт. 72.

№ 6. — Прямая задана точками A и B. Узнать, лежит ли данная точка D на прямой.

№ 7. — Восставить из данной точки A к прямой AB перпендикуляр AE (черт. 72).

Из точки A, как из центра, проводим окружность радиусом AB и из точки B — дугу тем же радиусом до пересечения с окружностью в точке C. Из точки C радиусом AB проводим дугу ADE, где D — точка, лежащая на окружности. Из точки D тем же радиусом проводим дугу CE; AE — искомый перпендикуляр.

Доказательство.

$ABCD$ — ромб; $DC \parallel AB$; $ACDE$ — ромб. Следовательно, $AE \perp CD$; $AE \perp AB$.

Это построение проведено при одном растворе циркуля (сравнить с задачей № 2 четырнадцатой темы).

№ 8. — Через точку, лежащую на окружности, провести касательную к окружности.

Решим задачу двумя способами.

Первый способ. Пусть O — центр круга и A — данная точка на окружности. К прямой OA в точке A восставляем перпендикуляр (задача № 2 четырнадцатой темы). Построение выполняется при одном растворе циркуля и требует проведения трех окружностей, не считая данной.

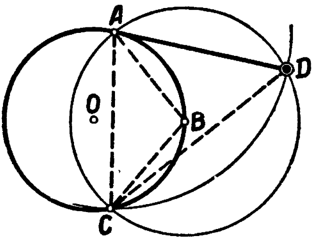
Второй способ. Из произвольной точки B, лежащей на данной окружности (черт. 73), как из центра, проводим окружность, проходящую через точку A и пересекающую данную окружность в точке C. Из точки A радиусом AC засекаем проведенную окружность в точке D. Прямая AD — искомая касательная.

Доказательство.

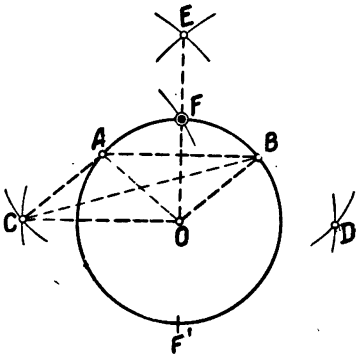
$$\angle BCA = \angle BAC \ (AB = BC),$$

$$\angle BAC = \angle BAD,$$

так как AB — линия центров окружностей, а CD — их общая хорда. Следовательно, $\angle BAD = \angle BCA$, т. е. угол BAD составлен хордой AB и касательной AD. Построение производится проведением двух окружностей.



Черт. 73.



Черт. 74.

№ 9. — Найти середину дуги AB (черт. 74).

Из точек A и B радиусами, равными радиусу данной окружности, проводим дуги OC и OD, из точки O засекаем их дугами, радиусы которых равны AB. В пересечении получаем точки C и D. Из точек C и D радиусом, равным CB или AD, проводим дуги до пересечения в точке E. Из точки C радиусом OE проводим дугу до пересечения в точке F с данной дугой AB. Точка F — середина дуги AB.

Доказательство.

Из параллелограма $ABOC$ имеем:

$$2AB^2 + 2AC^2 = CB^2 + AO^2; \quad CB^2 = 2d^2 + r^2,$$

где $d = AB$. Прямая OE по построению перпендикулярна к AB:

$$OE^2 = (2d^2 + r^2) - d^2 = d^2 + r^2,$$

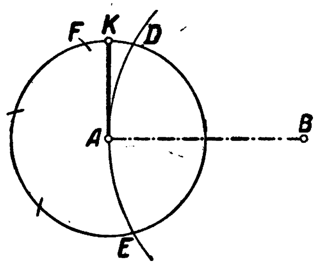
$$OF^2 = d^2 + r^2 - d^2 = r^2.$$

Точка F лежит на перпендикуляре к хорде AB и на дуге AB. Точка F — искомая.

Учитывая, что дуги, проведенные из точек C и D, как центров, пересекаются не только в точке E, но и в точке E_1 (на чертеже не указана), мы можем в точке F_1 разделить пополам дугу, дополняющую первую дугу до целой окружности.

Задача об отыскании середины дуги имеет важное значение и будет в дальнейшем часто применяться.

№ 10. — К прямой AB в точке A восставить перпендикуляр и отложить на нем отрезок, равный данному отрезку d.



Черт. 75.

Опишем вокруг точки A окружность радиусом, равным данному отрезку d (черт. 75). Из точки B радиусом BA проводим дугу DAE, пересекающую первую окружность в точках D и E. Строим точку F, диаметрально противоположную точке E. Дугу FD делим в точке K на две равные части. AK — искомый перпендикуляр.

Доказательство.

Угол FDE — прямой, $DE \perp AB$. Следовательно, прямая AK, будучи перпендикулярна к FD, перпендикулярна к AB, отрезок $AK = d$.

Тема шестнадцатая

ДЕЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ НА РАВНЫЕ ЧАСТИ, ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫПРЯМЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

№ 1. — Узнать, проходит ли прямая, заданная двумя своими точками A и B, через центр O данной окружности?

Описывая из точек A и B дуги, проходящие через центр данной окружности, мы получим пересекающиеся дуги или касающиеся одна другой. В случае пересечения дуг прямая AB не проходит через центр окружности, в случае касания дуг прямая AB проходит через центр.

№ 2. — Найти точки пересечения данной прямой AB и данной окружности.

Рассмотрим два случая.

1) Прямая AB не проходит через центр данной окружности. Строим точку O_1, симметричную точке O относительно данной прямой AB. Из точки O_1, радиусом, равным радиусу данной окружности, проводим окружность. Пусть проведенная окружность пересекает данную в точках M и N. Легко видеть, что M и N — искомые точки. Действительно, точки M и N лежат на окружности и на прямой AB (задача № 5 пятнадцатой темы). Если проведенная окружность касается данной окружности в точке P, то и прямая AB касается окружности в той же точке P. Если проведенная окружность не пересекает данной, то прямая проходит вне данного круга.

2) Прямая AB проходит через центр круга.

Из точки A или B проводим произвольную окружность, пересекающую данную в точках C и C_1. Если разделить дуги, стягиваемые хордой CC_1 в точках X и Y пополам, то X и Y — искомые точки.

№ 3. —Из внешней точки A провести к окружности с центром O касательные (найти точки касания):

Из точки A, как из центра, проводим окружность радиуса AO, из точки O — центра данной окружности, радиусом, равным диаметру данной окружности, проводим окружность до пересечения с проведенной в точках B и C. Из точек B и C проводим окружности радиусом, равным радиусу данной окружности. Каждая из этих окружностей касается данной в искомой точке.

№ 4. — Разделить окружность на четыре равные части.

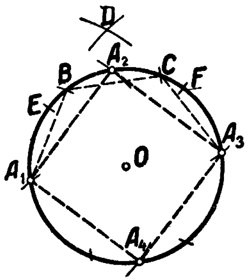
Из произвольной точки A_1 засекаем окружность радиусом, равным радиусу окружности (черт. 76), в точке B, потом из точки B тем же радиусом засекаем окружность в точке C и из C — в точке A_3. Точки A_1 и A_3 — противоположные вершины квадрата. Для отыскания двух других вершин квадрата проводим из точек A_1 и A_3 дуги радиусом, равным $A_1C = A_3B$, до пересечения в точке D. Из точки A_1 радиусом, равным OD, засекаем окружность в точках A_2 и A_4. Точки A_2 и A_4 — искомые.

Доказательство.

$$A_1C = r\sqrt{3}\,;\ A_1D = r\sqrt{3}\,;\ OD = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}\,;$$

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1 = r\sqrt{2}\,.$$

№ 5. — Разделить окружность на восемь равных частей.



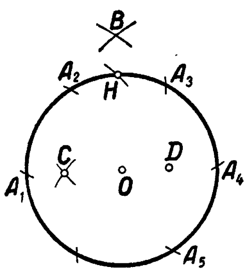
Черт. 76.

Первый способ. Определяем середину дуги A_1A_2 (чèрт. 76).

Второй способ. Из точки D радиусом, равным радиусу окружности, засекаем окружность в точках E и F; A_1, E, A_2, F, A_3 (черт. 76) — вершины восьмиугольника.

Доказательство. Треугольник ODE — равнобедренный. $OE = DE = r$; треугольник ODE — прямоугольный, так как $OD = r\sqrt{2}$, и, следовательно, $OD^2 = OE^2 + DE^2$; $\angle DOE = 45°$.

№ 6. — Разделить окружность на десять равных частей.



Черт. 77.

Строим последовательно пять вершин A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 правильного шестиугольника (черт. 77). Из точек A_1 и A_4 радиусами A_1A_3 и A_2A_4 проводим дуги до пересечения в точке B. $OB = r\sqrt{2}$. Из точек A_3 и A_5 радиусами, равными $OB = r\sqrt{2}$, проводим дуги до пересечения в точке C. Докажем, что $OC = a_{10}$.

Доказательство. Точка C лежит на прямой OA_1 (задача № 5 темы пятнадцатой). D—точка пересечения прямых A_1CA_4 и A_3A_5; $OD=\frac{r}{2}$ (апофема правильного треугольника). Из прямоугольного треугольника A_3DC имеем:

$$A_3C=r\sqrt{2}\,;\quad A_3D=\frac{r\sqrt{3}}{2}\,;\quad CD=\frac{r\sqrt{5}}{2}$$

$$CO=\frac{r\sqrt{5}}{2}-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)=a_{10}\,.$$

Деление окружности на десять равных частей при помощи одного циркуля было известно еще Птолемею.

№ 7. — Разделить отрезок OA в среднем и крайнем отношении.

Сторона десятиугольника равна большей части радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении, а потому данная задача сводится к предыдущей.

№ 8. — Разделить окружность на пять равных частей.

Первый способ. Разделив окружность на десять равных частей (задача № 5), отмечаем точки деления через одну. Эти точки — вершины правильного пятиугольника.

Второй способ. Из точки A_1 (черт. 77) радиусом, равным $OB=R\sqrt{2}$, засекаем окружность в точке H. CH—сторона пятиугольника.

Действительно, треугольник A_1OH—прямоугольный ($A_1O=R$; $OH=R$; $A_1H=R\sqrt{2}$). Следовательно,

$$CH=\sqrt{R^2+a_{10}^2}=\sqrt{\frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5})+R^2}=$$

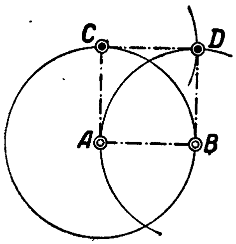
$$=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=a_5.$$

№ 9. — По данной стороне построить квадрат.

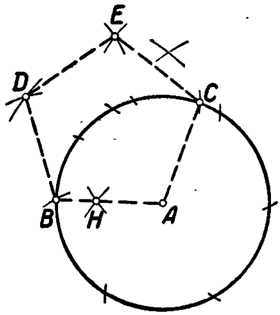
Пусть AB — данная сторона (черт. 78). Восставим к ней в точке A перпендикуляр и отложим на нем отрезок, равный стороне AB (задача № 10 пятнадцатой темы). Получаем точку C. Из точек C и B проводим дуги радиусами, равными AB, до пересечения в точке D. $ABCD$ — квадрат.

№ 10. — По данной стороне AB построить правильный пятиугольник (черт. 79).

Описываем из центра A окружность радиусом AB. Строим $AH=a_{10}$ (задача № 6). От точки B последовательно три раза засекаем окружность дугой, радиус которой равен AH; получаем точку C — вершину пятиугольника. Действительно, $\angle BAC = 108°$ (по по-



Черт. 78.



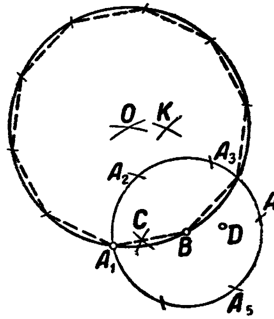
Черт. 79.

строению). Итак, мы имеем три вершины искомого пятиугольника. Для получения двух других поступаем следующим образом: из точки B проводим дугу радиусом AB и из вершины A — дугу радиусом, равным BC, до их пересечения в точке D. Точка D — четвертая вершина пятиугольника (диагональ BC равна диагонали AD). Для получения пятой вершины E из точек C и D проводим дуги радиусом, равным AB.

№ 11. — По данной стороне построить правильный десятиугольник. Из формулы $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, выражающей сторону правильно вписаннного десятиугольника через радиус r окружности, найдем, что

$$r = \frac{2a_{10}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2a_{10}(\sqrt{5} + 1)}{4} =$$

$$= \frac{a_{10}}{2}(\sqrt{5} + 1).$$



Черт. 80.

Итак, зная сторону правильного десятиугольника, вписанного в круг, можно определить радиус круга и построить круг. Пусть $A_1B = a_{10}$. Из точки B, как из центра, радиусом, равным A_1B — стороне десятиугольника, проводим окружность (черт. 80). Строим последовательно пять вершин A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 правильного вписанного шестиугольника. Из точек A_1 и A_4 радиусами A_1A_3 и A_2A_4 проводим дуги до их пересечения в точке K; $KB = R\sqrt{2}$, где $R = A_1B$. Из точек A_3 и A_5 радиусом, равным $KB = a_{10}\sqrt{2}$, проводим дуги до их пересечения в точке C.

Отрезок $CA_4 = \frac{a_{10}}{2}(\sqrt{5} + 1)$—радиус круга, описанного около десятиугольника, сторона которого A_1B дана. Действительно, точка C лежит на A_1B (задача№ 5 пятнадцатой темы); DA_4 — апофема правильного треугольника, вписанного в круг радиуса a_{10}, а потому $DA_4 = \frac{a_{10}}{2}$. Из прямоугольного треугольника A_3DC имеем:

$$CD = \sqrt{2a_{10}^2 - \frac{3a_{10}^2}{4}} = \frac{a_{10}\sqrt{5}}{2}.$$

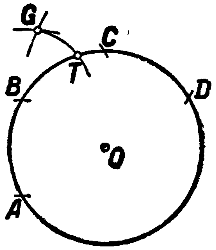
Итак,

$$CA_4 = \frac{a_{10}(\sqrt{5}+1)}{2},$$

т. е. равно радиусу круга, описанного около десятиугольника.

Для отыскания центра круга из точек A_1 и B радиусом, равным CA_4, проводим дуги до их пересечения в точке O. Из центра O радиусом OA_1 проводим окружность. Откладывая последовательно от точки A_1 десять раз дуги радиусом, равным A_1B, построим искомый десятиугольник.

№ 12. — Приближенное выпрямление окружности.



Черт. 81.

При помощи одного циркуля можно провести очень простое и практически ценное выпрямление четверти окружности (т. е. приближенное построение $\frac{\pi}{2}$).

Из произвольной точки A окружности радиусом, равным радиусу окружности, засекаем окружность последовательно в точках B, C, D (черт. 81). Из точек A и D радиусами, равными $AC = BD$, проводим дуги до их пересечения в точке G. Из точки B радиусом BG пересекаем окружность в точке T. Отрезок AT приближенно равен четвертой части длины окружности.

Доказательство. Пусть радиус окружности равен R. Тогда

$$OG = \sqrt{AG^2 - OA^2} = \sqrt{3R^2 - R^2} = R\sqrt{2}.$$

Так как $BC = R$, то из треугольника BGO имеем:

$$BG^2 = OG^2 + OB^2 - 2 \cdot OG \cdot OB \operatorname{Cos} 30°,$$

$$BG^2 = 2R^2 + R^2 - 2R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

$$BG^2 = 3R^2 - R^2\sqrt{6}; \quad BG = R\sqrt{3 - \sqrt{6}}.$$

В треугольнике ABT угол $ATB = 30°$ (измеряется половиной дуги AB), сторона $AB = R$, сторона $BT = R\sqrt{3 - \sqrt{6}}$. Определим сторону AT. Пусть $AT = x$. Тогда имеем:

$$AB^2 = BT^2 + AT^2 - 2 \cdot BT \cdot AT \operatorname{Cos} 30°,$$

$$R^2 = R^2(3 - \sqrt{6}) + x^2 - Rx\sqrt{9 - 3\sqrt{6}}.$$

Решив это уравнение, получим

$$x = AT = \frac{R}{2}\left(\sqrt{9 - 3\sqrt{6}} + \sqrt{1 + \sqrt{6}}\right) = 1{,}5712 \ldots R.$$

Так как длина четверти окружности равна:

$$\frac{\pi R}{2} = 1{,}5708 \ldots R,$$

то отрезок AT приближенно равен четверти окружности с точностью до первых трех десятичных знаков.

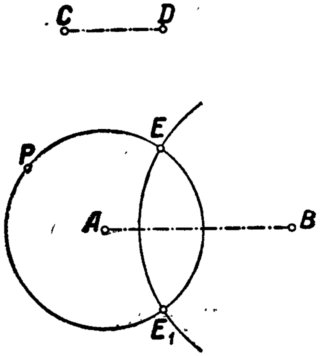
Тема семнадцатая

СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ, УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

№ 1. — Данный отрезок увеличить или уменьшить на длину другого данного отрезка.

Трудность задачи заключается в том, что при сложении и вычитании отрезков следует откладывать отрезки на прямой, которую циркулем построить нельзя.

Пусть AB и CD — данные отрезки (черт. 82). Для решения задачи из точки A, конца одного отрезка, как из центра, проводим окружность радиусом, равным CD. Ломаная BAP, где P — произвольная точка окружности, состоит из двух звеньев, соответственно равных двум данным отрезкам. Задача состоит в спрямлении ломаной. Для этого вокруг точки B произвольным радиусом проводим окружность, пересекающую первую в точках E и E_1. Точки E и E_1 симметричны относительно прямой AB, а потому расстояния произвольной точки прямой AB до точек E и E_1 равны между собой; следовательно, требуется найти на каждой из двух дуг EE_1 точку, равноудаленную от точек E и E_1.



Черт. 82.

Для построения искомых точек находим середины каждой из двух дуг (задача № 9 пятнадцатой темы), которые и будут искомыми.

№ 2. — Данным радиусом провести окружность, касающуюся данной окружности в данной точке.

Указание. Построить сумму и разность радиусов. Задача имеет два решения.

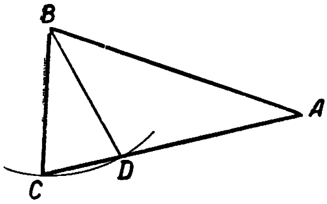
№ 3. — Увеличить данный отрезок в два, три, ..., n раз.

Для решения дальнейших задач докажем следующую теорему.

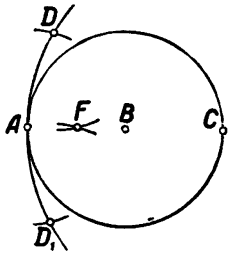
Вспомогательная теорема. В равнобедренном треугольнике, основание которого равно a и боковая сторона равна b, дуга, проведенная вокруг конца основания радиусом, равным основанию, отсекает от боковой стороны отрезок, прилежащий к основанию, равный $\frac{a^2}{b}$.

Доказательство. Пусть ABC равнобедренный треугольник; $AB = AC$ (черт. 83). Из подобия треугольников ABC и CBD имеем:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}; \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{CD}; \quad CD = \frac{a^2}{b}.$$



Черт. 83.



Черт. 84.

№ 4. — Разделить отрезок AB на две равные части.

Увеличиваем отрезок AB в два раза (черт. 84): $AC = 2AB$. Из точки C проводим дугу радиусом CA и из точки A — дугу радиусом AB. Точки D и D' — точки пересечения дуг. Из точек D и D' радиусом DA засекаем AC в точке F. F — середина AB, так как на основании предыдущей теоремы имеем:

$$AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AB^2}{2\,AB} = \frac{AB}{2}.$$

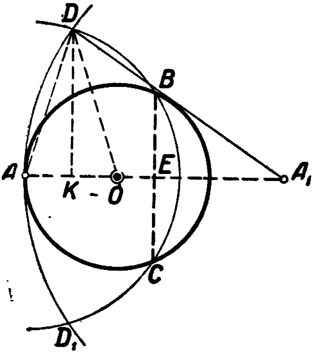
№ 5. — Разделить отрезок AB на n равных частей. *Указание.* Построить отрезок, равный $n \cdot AB$.

Тема восемнадцатая

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕНТРА ОКРУЖНОСТИ

№ 1. — Определить центр окружности (черт. 85). Вокруг произвольной точки A, лежащей на окружности, описываем произвольным радиусом окружность, пересекающую данную в точках B и C. Строим точку A_1, симметричную точке A относительно хорды BC. Вокруг точки A_1 радиусом A_1A описываем дугу, которую засекаем из точки A радиусом AB в точках D и D_1. Из точек D и D_1 радиусом D_1A проводим дуги, пересекающиеся в точке O (в искомом центре окружности).

Доказательство. Легко видеть, что точка O лежит на прямой AA_1. Следует показать, что OA равно радиусу данной окружности. Действительно, пусть



Черт. 85

$$AB = AD = x;$$

так как AD — хорда окружности с центром в точке A_1, то

$$AD^2 = x^2 = 2AA_1 \cdot AK = \\ = AA_1 \cdot AO,$$

$$AB^2 = x^2 = 2r \cdot AE,$$

$$AA_1 \cdot AO = 2r \cdot AE,$$

$$AA_1 \cdot AO = r \cdot AA_1,$$

$$AO = r.$$

Итак, одним циркулем можно найти центр окружности. Мы видим, что при решении задачи „отыскание центра окружности" циркуль „сильнее" линейки.

В шестой теме мы специально решили ряд задач на отыскание центра окружности при помощи линейки при наличии в каждой задаче какого-либо дополнительного условия (дан параллелограм, равнобочная трапеция, равносторонний треугольник и т. д.).

Далее мы увидим, что для отыскания циркулем центра окружности достаточно задать окружность своими тремя точками.

В следующей задаче рассматривается простейший случай такого задания.

№ 2. — Определить центр окружности, если даны три точки A, B, C окружности, где точка A — середина дуги BC.

Эта задача иначе может быть сформулирована еще и следующим образом:

Описать окружность около данного равнобедренного треугольника ABC, где BC — основание его.

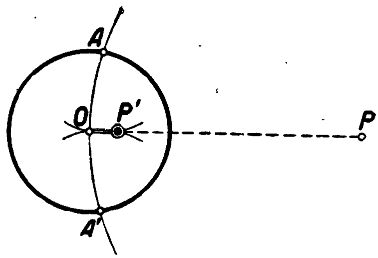
Из решения предыдущей задачи (черт. 85) вытекает построение центра.

№ 3. — Описать окружность около равнобедренного треугольника, если дана его боковая сторона AB и точка D на основании.

Эту задачу можно свести к предыдущей, отыскав точку C пересечения прямой BD и окружности с центром A и радиусом AB. Но можно обойтись и без отыскания точки C, а именно, зная точки B и D, найдем точку A_1 (задача № 1), и далее, как в задаче № 1.

Ранее чем перейти к общему случаю определения центра окружности, описанной около треугольника, мы дадим понятие о преобразовании инверсии. Мы только определим это преобразование и покажем, что операции, производимые при этом преобразовании, могут быть совершены исключительно циркулем.

Свойства этого преобразования могут быть изучены по указанным в списке литературы книгам А. Адлера, Н. Ф. Четверухина (Методы геометрических построений) и Д. И. Перепелкина (Курс элементарной геометрии).



Черт. 86.

Предположим, что дана окружность с центром в точке O и радиусом r (черт. 86). Назовем эту окружность основной. Пусть P — произвольная точка плоскости. Точка P' называется соответствующей точке P в инверсии относительно основной окружности, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) P' лежит на луче OP,

2) $OP \cdot OP' = r^2$ или $OP' = \frac{r^2}{OP}$.

Покажем в следующей задаче, что построение точки P', соответствующей точке P в преобразовании инверсии (короче — построение точки P' инверсной точке P), может быть произведено исключительно циркулем; число r^2 называется степенью инверсии.

№ 4. — Построить точку P', инверсную точке P относительно окружности O:

Первый случай—точка P лежит вне круга (черт. 86). Вокруг точки P описываем радиусом OP окружность, пересекающую данную в точках A и A^1. Вокруг точек A и A' радиусом, равным радиусу окружности, проводим дуги, пересекающиеся в центре окружности и в искомой точке P'. Действительно, точки $OP'P$ лежат на одной прямой (задача № 5 пятнадцатой темы); $OP \cdot OP' = r^2$, что следует из подобия равнобедренных треугольников $OA'P$ и $OA'P'$. Построение всегда возможно.

Очевидно, что если точка P лежит вне круга, то инверсная ей точка будет внутри круга, если точка P лежит на основной окружности, то инверсная совпадает с нею.

Второй случай — точка P лежит внутри круга O.

Пусть $OP > \frac{r}{2}$, тогда построение аналогично построению, приведенному для первого случая.

Пусть $OP < \frac{r}{2}$. Построение искомой точки предложенным способом невозможно, так как окружность, проведенная из P радиусом OP, не пересечет данной окружности. В этом случае строим вспомогательную точку Q так, чтобы $OQ = n \cdot OP$, где n — целое число и $OQ > \frac{r}{2}$. Для точки Q строим инверсную точку Q'.

Точка P', для которой $OP' = n \cdot OQ'$ — искомая. Действительно, по определению инверсии имеем: $OQ \cdot OQ' = r^2$, следовательно,

$$n \cdot OP \cdot \frac{OP'}{n} = r^2;\ OP \cdot OP' = r^2.$$

Точка P' — искомая.

Итак, всегда возможно одним циркулем построить точку, инверсную данной.

Примечание. Решение задачи № 2 об отыскании центра окружности может быть изложено следующим образом. Вокруг точки A, лежащей на окружности, проводим произвольную окружность, пересекающую данную в точках B и C. Проведенную окружность принимаем за окружность инверсии. Строим точ-

ку A', симметричную точке A относительно прямой BC. Точка, инверсная точке A',—искомый центр.

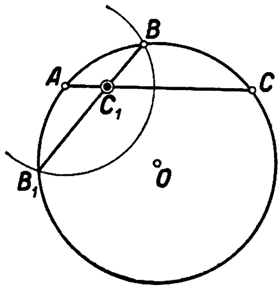
№ 5. — Точки A, B, C — произвольные точки окружности. Вокруг точки A радиусом AB проводится окружность, пересекающая данную в точке B_1 (кроме точки B) (черт. 87). C_1 — точка пересечения прямых AC и BB_1. Доказать, что точка C_1 инверсна точке C относительно проведенной окружности.

Из подобия треугольников ABC_1 и ACB имеем:

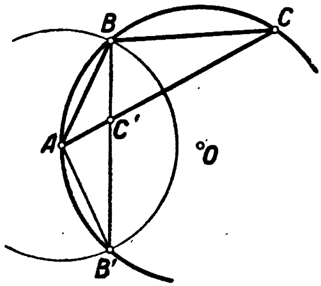
$$\frac{AB}{AC_1} = \frac{AC}{AB}; \quad AB^2 = AC \cdot AC_1 .$$

Справедлива и обратная теорема:

Если на окружности взяты три точки B, A и B_1, причем A — середина дуги BB_1, и если из A проведена произвольная прямая, пересекающая BB_1 в точке C_1, то точка, инверсная точке C_1 относительно окружности с центром A и радиусом AB, лежит на данной окружности.



Черт. 87.



Черт. 88.

№ 6. — Около треугольника ABC (черт. 88) описать окружность.

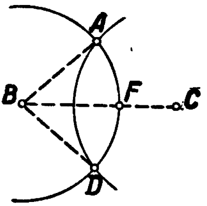
Предыдущая задача позволяет свести данную ко второй задаче этой темы. Действительно, опишем вокруг точки A окружность радиусом AB и построим точку C', инверсную точке C относительно проведенной окружности. Точка C' по доказанному в предыдущей задаче лежит на прямой BB', и поэтому задача сводится к отысканию центра окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABB^1, у которого даны вершины A, B и точка C' на основании BB'.

Тема девятнадцатая

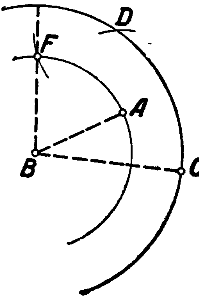
УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ УГЛОВ. ПОСТРОЕНИЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ. ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

№ 1. — Удвоить данный угол ABC (черт. 89).

Вокруг вершины B проводим радиусом BA дугу, которую засекаем из точки C радиусом CA в точке D. Угол DBA — искомый. Из равенства треугольников ABC и CBD следует равенство углов ABC и CBD.



Черт. 89.



Черт. 90.

№ 2. — Утроить данный угол ABC (черт. 90).

Из вершины B проводим две концентрические окружности радиусами BA и BC. Из точки A засекаем радиусом AC в точке D окружность, проходящую через точку C. Из точки D засекаем тем же радиусом вторую окружность в точке F. $\angle FBC$ — искомый.

№ 3. — Провести биссектрису данного угла ABC.

Решим задачу двумя способами.

Первый способ. Откладываем на прямой BC отрезок BD, равный BA (задача № 1 семнадцатой темы). Из точек A и D произвольными радиусами проводим дуги, пересекающиеся в точке F. Прямая AF — искомая биссектриса.

Второй способ. Удваиваем данный угол ABC (задача № 1). Получаем точку D (черт. 89). Определяем точку F — точку пересечения прямой BC и дуги AD (задача № 2 шестнадцатой темы). Делим дугу AF в точке X на равные части. Прямая BX — биссектриса.

№ 4. — По трем отрезкам a, b, c построить четвертый, пропорциональный им, т. е. отрезок x такой, что $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

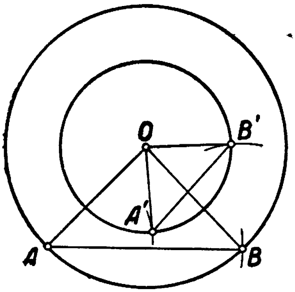
Из произвольной точки O (черт. 91) описываем две концентрические окружности радиусами a и b. Из произвольной точки A, взятой на окружности большего радиуса, засекаем окружность меньшего радиуса дугой, радиус которой равен произвольному отрезку AA', и окружность большего радиуса — радиусом AB, равным c. Из точки B засекаем окружность меньшего радиуса дугой радиуса $BB'=AA'$. Отрезок $A'B'$ — искомый.

Действительно, из равенства треугольников AOA' и BOB' имеем:

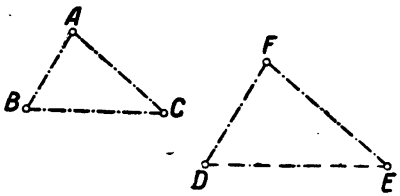
$$\angle BOB'=\angle AOA'; \quad 2\angle BOB'=2\angle AOA';$$

$$\angle A'OB'=\angle AOB; \quad \triangle A'OB' \sim \triangle AOB;$$

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}; \quad \frac{x}{c}=\frac{b}{a}; \quad x=\frac{bc}{a}.$$



Черт. 91



Черт. 92

№ 5. — На прямой DE (заданной двумя точками D и E) при точке D построить угол, равный углу ABC (заданному точками A, B, C) (черт. 92).

Построим на прямой DE треугольник DEF, подобный треугольнику ABC. Для этого необходимо построить его стороны DF и EF. Из пропорций

$$\frac{DF}{AB}=\frac{DE}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{FE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

следует, что

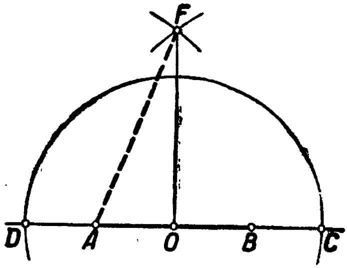
$$DF = \frac{AB \cdot DE}{BC} \text{ и } FE = \frac{AC \cdot DE}{BC}$$

(задача № 4).

№ 6. — Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

№ 7. — Построить отрезок, равный среднему геометрическому двух данных отрезков a и b.

Пусть $b < a$. Откладываем $AB = b$ (черт. 93), причем O — середина AB (задача № 4 семнадцатой темы). От точки A откладываем $AC = a$. Из O, как из центра, радиусом OC описываем окружность. Находим точку D, диаметрально противоположную точке C. Из точек D и C проводим дуги радиусом, равным a, до их пересечения в точке F; $AF = \sqrt{ab}$.



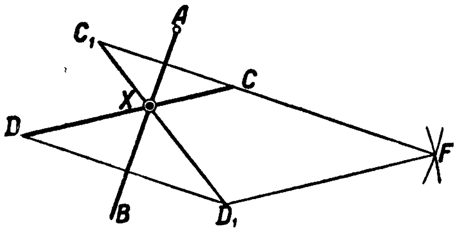
Черт. 93.

Доказательство.

$$AO^2 = \frac{b^2}{4}; \quad OF^2 = a^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = ab - \frac{b^2}{4};$$

$$AF^2 = AO^2 + OF^2 = ab; \quad AF = \sqrt{ab}.$$

№ 8. — Определить точку пересечения двух данных прямых AB и CD (черт. 94).



Черт. 94.

Точка пересечения прямых AB и CD лежит на прямой C_1D_1, симметричной CD относительно AB. В искомой точке X пересекаются прямые AB, CD и

C_1D_1. Будем искать точку пересечения прямых AB и C_1D_1. Построим вспомогательную точку F следующим образом: из C радиусом $CF=DD_1$ проведем дугу, которую пересечем в точке F дугой, описанной из центра D_1 радиусом, равным DC. Из подобия треугольников C_1XC и C_1D_1F имеем:

$$\frac{C_1X}{C_1D_1}=\frac{C_1C}{C_1F}: \quad C_1X=\frac{C_1D_1\cdot C_1C}{C_1F}.$$

Таким образом, если построить к отрезкам C_1D_1, C_1C и C_1F четвертый, пропорциональный им отрезок C_1X и отложить его от точки C_1, то получится искомая точка X.

Теперь займемся обоснованием построений, производимых одним циркулем. Для этого рассмотрим снова задачи a) — e), к которым сводится решение задач на построение, разрешаемых циркулем и линейкой (см. десятую тему):

a) Проведение прямой линии через две известные точки.

b) Определение точки пересечения двух известных прямых.

c) Проведение окружности с известным центром и известным радиусом.

d) Определение точек пересечения известной прямой и известной окружности.

e) Определение точек пересечения двух известных окружностей.

Задачи c) и e) решаются исключительно циркулем. Задача a) может быть решена циркулем в том смысле, что по двум известным точкам можно построить бесконечное множество точек прямой. Выполнимость построения прямой по точкам при помощи циркуля показана в задаче № 5 пятнадцатой темы. Задача b)— задача № 8 девятнадцатой темы. Задача d)—задача № 2 шестнадцатой темы.

Итак, все задачи, решаемые циркулем и линейкой, могут быть решены исключительно циркулем.

Часть III — ДОПОЛНЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ ЛИНЕЙКИ

ГЛАВА IV

Тема двадцатая

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧЕТВЕРКИ И ИХ СВОЙСТВА

Отношение трех точек, лежащих на одной прямой

1. Отрезки, лежащие на одной прямой, мы будем сравнивать не только по величине, но и по направлению. Для возможности такого сравнения выберем на прямой определенное направление, которое будем считать положительным. Противоположное направление назовем отрицательным. На чертеже 95 положительное направление прямой отмечено стрелкой. При этом условии и при выбранной единице масштаба каждому отрезку будет соответствовать число, измеряющее длину этого отрезка и имеющее знак плюс при положительном направлении отрезка, и знак минус — при отрицательном направлении. Например, отрезку AB соответствует положительное число (черт. 95), а отрезку CD — отрицательное.

Черт. 95.

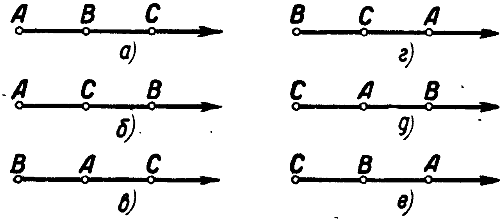
Называя отрезок двумя буквами, мы первой буквой обозначаем начальную точку, а второй — конечную точку отрезка. При введенном нами условии отрезки AB и BA, равные по величине, противоположны по знаку.

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \quad \text{или} \quad \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

2. *Теорема.* При любом расположении трех точек A, B, C на направленной прямой существует следующее равенство:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Шесть возможных расположений трех точек на направленной прямой указаны на чертеже 96.



Черт. 96.

1-й случай. Из чертежа 96а замечаем, что

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AC}+\overline{CA}=0.$$

2-й случай. Из чертежа 96б замечаем, что

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AC}+\overline{CA}=0.$$

Аналогично доказывается теорема и в остальных случаях.

3. Выберем на прямой (черт. 97) две точки A и B,

Черт. 97.

Черт. 98.

которые будем считать основными, и некоторую точку M. Назовем отношение $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$ отношением трех точек и обозначим его символом (ABM).

Пусть точка M находится внутри отрезка AB, тогда (ABM) отрицательно, так как отрезки $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$ имеют противоположные направления. При совпадении точки M с точкой A отношение $(ABM)=(ABA)=0$. При совпадении точки M с точкой B отношение $(ABM)=(ABB)=\infty$.

Пусть точка M занимает положение вне отрезка AB (черт. 98). В этом случае $(ABM)>0$, так как $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$ одинаково направлены. Притом

$$(ABM)=\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}+1>1. \qquad (1)$$

По мере удаления точки M от точки B величина (ABM) стремится к единице (так как при этом знаменатель дроби $\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}$ возрастает, и, следовательно, дробь стремится к нулю).

Каждому положению точки M на прямой соответствует единственное значение отношения (ABM): положительное, если точка M лежит вне отрезка AB, и отрицательное, если точка M лежит внутри отрезка AB. Покажем, что и обратно — каждому значению отношения (ABM) [за исключением $(ABM)=1$] соответствует единственная точка на прямой.

Предположим, что для двух точек M и N существует равенство $(ABM)=(ABN)$. Тогда имеем:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}.$$

Так как $\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{BM}$, $\overline{AN}=\overline{AB}+\overline{BN}$, то

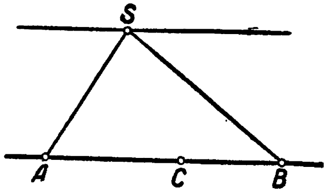
$$\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{AB}+\overline{BN}}{\overline{BN}};\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BN}}+1=\frac{\overline{AB}}{\overline{BN}}+1.$$

Отсюда следует, что $\overline{BM}=\overline{BN}$, т. е. точки M и N совпадают.

Итак, мы доказали, что каждому значению отношения (ABM), за исключением $(ABM)=1$, соответствует определенная точка. Значению $(ABM)=1$ должна была бы соответствовать точка, лежащая вне отрезка и равноудаленная от его концов. Ясно, что такой точки нет. Посмотрим, где будет находиться точка M, если отношение (ABM) сколь угодно близко к единице. Из равенства (1) заключаем, что с приближением отношения (ABM) к единице точка M всё более и более удаляется от концов отрезка AB. Условно будем говорить, что значению $(ABM)=1$ соответствует бесконечно удаленная точка или несобственная точка прямой.

Можно было бы притти к понятию несобственной точки прямой, исходя из других соображений. Пусть дана прямая AB и точка S вне ее (черт. 99). Проведем из S несколько прямых, тогда каждая из этих прямых пересечет прямую AB в некоторой точке.

Каждой прямой, проведенной из точки S и не параллельной прямой AB, соответствует на AB единственная точка, а именно—точка ее пересечения с проведенной прямой. Прямой, параллельной AB и проходящей через точку S, не найдется соответственной точки. Условно будем говорить, что точкой пересечения прямой с параллельными ей прямыми служит несобственная точка этой прямой.



Черт. 99.

Если прямая, проведенная через S, вращается вокруг S, приближаясь к положению прямой, параллельной AB, то точка ее пересечения с прямой AB все более и более удаляется от точек A и B. Это дает основание называть введенную таким образом несобственную точку прямой AB бесконечно удаленной точкой этой прямой.

Гармоническая четверка точек

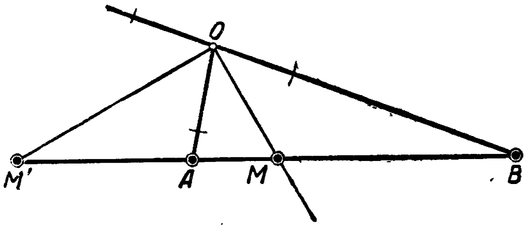
4. Две точки M и M' называются гармонически сопряженными относительно точек A и B, если

$$(ABM) = -(ABM'). \tag{2}$$

Четыре точки A, B, M, M' образуют в этом случае гармоническую четверку. Из равенства (2) следует, что по данным трем точкам A, B и M четвертая сопряженная M' определяется однозначно, т. е. существует единственная точка M', гармонически сопряженная точке M относительно точек A и B. Если четыре точки A, B, M и M' образуют гармоническую четверку, то пара точек A, B разделена гармонически парой сопряженных точек M и M', и обратно — пара точек M и M' гармонически разделена парой сопряженных точек A и B.

Из равенства (2) следует, что если одна из точек, скажем M, делит отрезок AB внутренним образом, то сопряженная ей точка M' делит AB внешним образом, причем абсолютные величины этих отношений равны.

В школьном курсе геометрии читатель встречал гармонические четверки точек. Вспомните теорему о биссектрисах внутреннего и внешнего углов тре-



Черт. 100.

угольника. Биссектриса CM внутреннего угла (черт. 100) треугольника ABC делит сторону AB в отношении прилежащих сторон:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AC}{BC}.$$

Биссектриса CM' внешнего угла треугольника делит сторону внешне в отношении прилежащих сторон:

$$\frac{AM'}{BM'}=\frac{AC}{BC}.$$

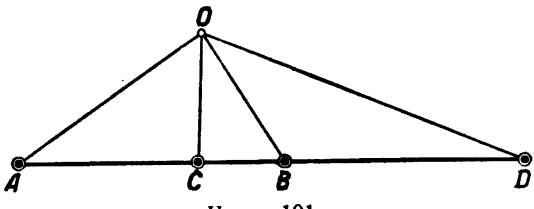
Следовательно,

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AM'}{BM'}; \qquad -\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}},$$

так как M находится внутри AB, а M' — вне, или

$$-(ABM)=(ABM'). \tag{3}$$

Назовем гармонической четверкой прямых четыре прямых, соединяющих произвольную точку с точками



Черт. 101.

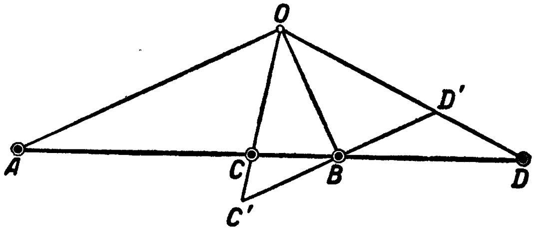
гармонической четверки (черт. 101). Например, стороны треугольника и биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине, в которой пересекаются эти стороны, образуют гармоническую четверку прямых. Если точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку точек, то прямые AO, OB, OC, OD, где O — произвольная точка, образуют гармоническую четверку прямых, которую будем обозначать так: $O \cdot ABCD$. Лучи OA и OB гармонически сопряжены относительно лучей OC и OD и обратно. Будем говорить, что гармоническая четверка лучей $O.ABCD$ проектирует гармоническую четверку точек A, B, C, D из центра проекции O.

Свойства гармонических четверок

5. Пусть $O \cdot ABCD$ — гармоническая четверка прямых, определенная гармонической четверкой точек A, B, C, D. Следовательно,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}, \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = -1. \tag{4}$$

Рассечем четверку прямых прямой, параллельной OA, проведенной через точку B (черт. 102). Эта прямая пересечет OC в точке C' и OD—в точке D'. Покажем, что точка B лежит в середине отрезка $D'C'$.



Черт. 102.

Треугольники AOC и $CC'B$ перспективно подобны[1]. Точка C—центр подобия. Вершине A треугольника AOC соответствует вершина B треугольника $CC'B$ и вершине O первого треугольника соответствует вершина C' второго, а потому

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BC'}}. \tag{5}$$

[1] Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия. Планиметрия, Учпедгиз, 1944, стр. 157.

Треугольники BDD' и AOD перспективно подобны. Точка D—центр подобия, следовательно,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{AO}}. \tag{6}$$

Перемножив равенства (5) и (6), получим:

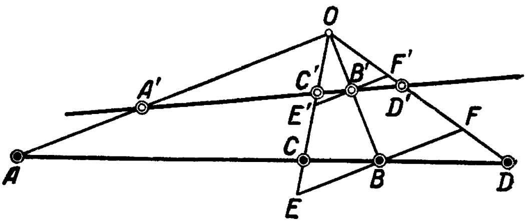
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{BC'}}. \tag{7}$$

На основании равенства (4) имеем:

$$-1 = \frac{\overline{BD'}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{D'B}}{\overline{C'B}}; \ (D'C'B) = -1.$$

Следовательно, точка B лежит в середине отрезка $D'C'$.

Итак, доказана следующая теорема: прямая, параллельная лучу гармонической четверки прямых, пересекает три других луча так, что точка на луче, сопряженном первому, лежит в середине отрезка, определяемого точками на двух других лучах.



Черт. 103.

6. Теперь выведем основное свойство гармонических четверок. Пусть A, B, C, D — гармоническая четверка точек, а $O.ABCD$ соответствующая ей гармоническая четверка прямых (черт. 103). Если проведем через точку B прямую, параллельную OA, то B — середина EF. Пересечем четверку произвольной секущей $A'C'B'D'$ и проведем через точку B' прямую, параллельную EF. Очевидно точка B' —середина $E'F'$. Треугольники $A'OC'$ и $B'C'E'$ перспективно подобны. C'—центр подобия. Следовательно,

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{E'B'}}. \tag{8}$$

Треугольники $OA'D'$ и $F'B'D'$ перспективно подобны. D' — центр подобия. Следовательно,

$$\frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{F'B'}}{\overline{OA'}}. \tag{9}$$

Перемножив равенства (8) и (9), получим:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{F'B'}}{\overline{E'B'}} = -1,$$

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} = -\frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}},$$

$$(A'B'C') = -(A'B'D'),$$

т. е. четверка $A'B'C'D'$ — гармоническая. Итак, доказана основная теорема.

Гармоническая четверка прямых образует на произвольной секущей гармоническую четверку точек. Сопряженные точки соответствуют сопряженным прямым.

Следовательно, если гармоническую четверку точек проектировать из произвольной точки и полученную при этом проектировании гармоническую четверку прямых рассечь произвольной прямой, то на этой прямой определится гармоническая четверка точек. Итак, гармоническая группа точек при проектировании и сечении снова переходит в гармоническую группу точек.

Свойства фигур, сохраняющиеся при проектировании и сечении, называются проективными свойствами.

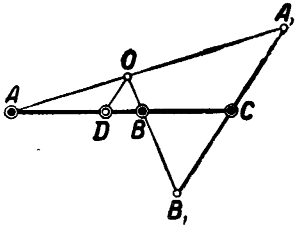
Гармонизм — свойство проективное.

Построение четвертого элемента гармонической четверки

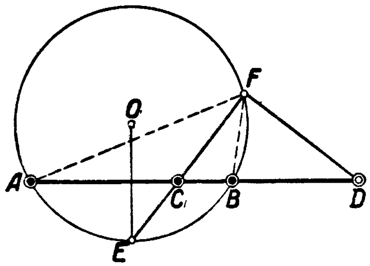
(построение циркулем и линейкой)

7. Мы дадим четыре способа построения четвертого элемента гармонической четверки по трем данным. Все эти способы требуют применения циркуля и линейки. Далее мы увидим, что можно значительно проще решить эту задачу одной линейкой.

1-й способ. Пусть на прямой даны точки A, B, C (черт. 104) и требуется построить четвертую гармоническую точку, сопряженную точке C. Проводим через точку C произвольную прямую и откладываем на ней $CA_1 = CB_1$. Проводим прямые AA_1 и BB_1 до пересечения их в точке O. Через точку O проводим прямую, параллельную A_1B_1. Точка D пересечения этой прямой с данной прямой является искомой точкой. Задача имеет единственное решение.



Черт. 104.

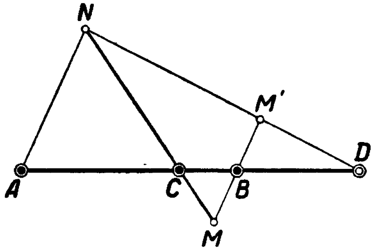


Черт. 105.

Легко видеть, что если C лежит в середине AB, то точка D становится несобственной.

2-й способ основан на теореме о биссектрисах внутреннего и внешнего углов треугольника.

Пусть на прямой даны точки A, B, C (черт. 105) и требуется построить точку D, гармонически сопряженную точке C относительно A и B. Через точки A и B проводим окружность произвольного радиуса. Из центра O окружности опускаем на данную прямую перпендикуляр и продолжим его до пересечения в точке E с дугой AB. Проводим прямую EC до пересечения в точке F с окружностью. Далее, восставляем в точке $F \perp$ к EF перпендикуляр FD. Точка D — искомая.

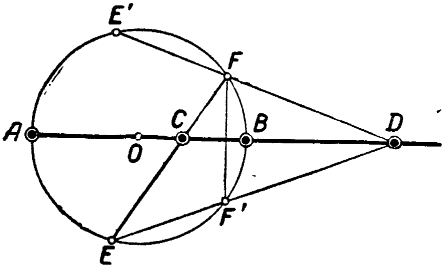


Черт. 106.

Действительно, FC—биссектриса внутреннего угла треугольника AFB, следовательно, FD—биссектриса внешнего угла.

3-й способ. Проводим через данные точки A и B (чертеж 106) произвольные, но параллельные между собой прямые AN и BM. Далее произвольной прямой, проходящей через данную точку C, пересекаем проведенные параллельные прямые в точках N и M. Откладываем на продолжении MB отрезок $BM'=MB$. Прямая NM' пересечет прямую AD в искомой точке D.

Решая задачу о построении четвертой гармонической точки, мы строили точку, сопряженную данной точке C, когда точка C лежала между точками A и B; рекомендуем читателю указанными тремя способами построить искомую точку D для того случая, когда точка C лежит вне отрезка AB.



Черт. 107.

4-й способ. Строим на AB, как на диаметре, окружность (черт. 107), через данную точку C проводим произвольную хорду EF. Строим точку F', симметричную точке F относительно диаметра. Прямая EF' пересекает AB в искомой точке D.

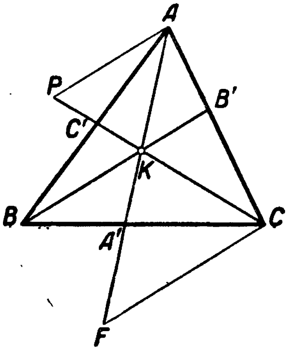
Доказательство. Проведем прямую DF до пересечения с окружностью в точке E'. Очевидно, что прямая AF есть биссектриса угла $E'FE$, следовательно, FB — биссектриса угла EFD. В треугольнике CFD FB и FA биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине F, а потому четверка точек A, B, C, D — гармоническая.

Тема двадцать первая

ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ЭЛЕМЕНТА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЧЕТВЕРКИ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Теорема Чевы. Если прямые, соединяющие какую-нибудь точку с вершинами треугольника ABC, пересекают его стороны AB, BC, CA соответственно в точках C', A', B', то (черт. 108)

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}} = 1.$$



Черт. 108.

Для доказательства проведем $AP \parallel BB'$ и $CF \parallel BB'$. Так как $AP \parallel BB'$, то

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{PK}{KC}.$$

Из подобия треугольников AKP и FKC имеем:

$$\frac{PK}{KC} = \frac{AP}{CF}.$$

Следовательно,

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AP}{CF}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников $CA'F$ и $BA'K$ получим:

$$\frac{CA'}{A'B} = \frac{CF}{KB}. \qquad (2)$$

Из подобия треугольников $AC'P$ и $BC'K$ следует:

$$\frac{BC'}{C'A} = \frac{BK}{PA}. \qquad (3)$$

Перемножив равенства (1), (2) и (3), получим окончательно:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

Теорема Чевы может быть записана так:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} = -1$$

или

$$(ACB')(CBA')(BAC') = -1.$$

Теорема Чевы остается справедливой, если точка K — точка пересечения прямых, исходящих из вершин треугольника, находится вне треугольника.

Легко может быть доказана обратная теорема: если точки C' A' B' расположены соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC или на их продолжениях так, что

$$(ABC')(BCA')(CAB') = -1,$$

то прямые AA', BB', CC' — параллельны или пересекаются в одной точке. Предположим, что прямые AA' и BB' пересекаются в точке K, а прямая CC' не проходит через эту точку. Пусть прямая CK пересекает сторону AB в точке D. Тогда имеем:

$$(ABD)(BCA')(CAB') = -1.$$

Следовательно,

$$(ABC') = (ABD)$$

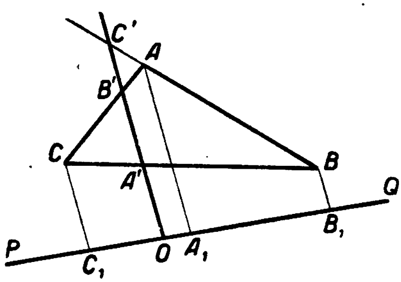
и точка C' должна совпадать с точкой D.

Прямые, выходящие из вершин треугольника и пересекающиеся в одной точке, называются прямыми Чевы.

Теорема Менелая. Если стороны AB, BC, CA треугольника ABC или их продолжения пересекаются прямой соответственно в точках C_1, A_1, B_1, то

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1.$$

Доказательство. Пусть стороны треугольника ABC пересечены секущей (черт. 109). Проведем в пло-



Черт. 109.

скости треугольника ABC произвольную прямую PQ и из вершин треугольника проведем прямые, параллельные секущей $A'B'C'$ до пересечения с прямой PQ.

На основании теоремы о прямых, пересеченных рядом параллельных прямых, имеем:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{A_1O}{OB_1}; \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{B_1O}{OC_1}.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{A_1O}{OB_1} \cdot \frac{B_1O}{OC_1} \cdot \frac{C_1O}{O_1A} = -1.$$

Теорема Менелая доказана.

Теорема Менелая может быть записана следующим образом:

$$(ABC')(BCA')(CAB') = 1.$$

Из этого равенства видно, что прямая может либо пересекать продолжения всех трех сторон, либо пересекать две стороны треугольника и продолжение третьей. В первом случае каждое из отношений $(ABC')(BCA')(CAB')$ положительно, во втором два отрицательны и одно положительно.

Легко может быть доказана теорема, обратная теореме Менелая. Если точки C' A' B' расположены так, что $(ABC')(BCA')(CAB') = 1$, то они лежат на одной прямой.

Предположим, что прямая $C'A'$ пересекает сторону CA не в точке B', а в точке D; тогда на основании теоремы Менелая имеем:

$$(ABC')(BCA')(CAD) = 1.$$

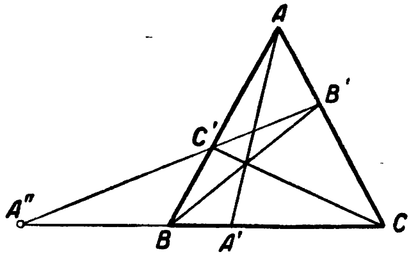
По условию:

$$(ABC')(BCA')(CAB') = 1,$$

откуда следует, что $(CAD) = (CBA')$ и точка D совпадает с точкой B'.

Теорема (следствие теорем Чевы и Менелая). Прямая Чевы и прямая, соединяющая основание двух других прямых Чевы, делят противоположную сторону треугольника гармонически. (Прямыми Чевы называются прямые, соединяющие произвольную точку плоскости треугольника с его вершинами. Основание прямой Чевы — точка пересечения ее со стороной треугольника.)

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (черт. 110) из вершин проведены прямые AA', BB', CC'.



Черт. 110.

Прямая $B'C'$ продолжена до пересечения в точке A'' с прямой BC. По теореме Чевы имеем:

$$(ACB')(BAC')(CBA') = -1.$$

По теореме Менелая:

$$(ACB')(BAC')(CBA'') = 1.$$

Разделив эти равенства почленно, получим:

$$\frac{(CBA')}{(CBA'')} = -1 \qquad (CBA') = -(CBA'').$$

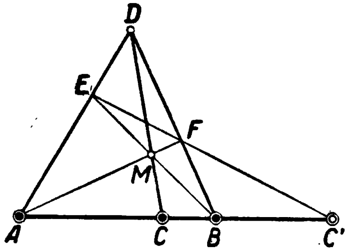
Теорема доказана.

Построение одной линейкой четвертого элемента гармонической четверки

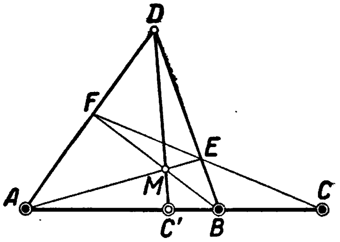
№ 1. — На прямой даны точки A, B, C. Построить одной линейкой точку, гармонически сопряженную точке C относительно точек A и B.

1-й случай. Точка C лежит внутри отрезка AB (черт. 111). Проводим из произвольной точки D, лежащей вне прямой AB, прямые DA, DB, DC. Из точки A проводим произвольную прямую AF, пересекающую CD в точке M. Продолжаем BM до пересечения с прямой AD в точке E. Прямая EF определит на продолжении AB точку C', гармонически сопряженную точке C относительно A и B.

2-й случай. Точка C лежит вне отрезка AB (черт. 112). Проводим из произвольной точки D, лежащей вне AB, прямые DA и DB. Из точки C проводим произволь-



Черт. 111.



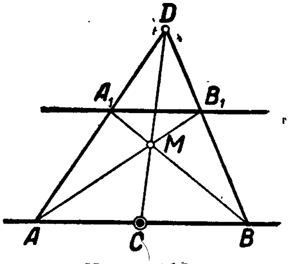
Черт. 112.

ную прямую CEF, пересекающую стороны AD и BD соответственно в точках F и E. Точку пересечения AE и BF обозначим через M. Точка C', лежащая на пересечении прямых DM и AB, — искомая.

Следует отметить, что рассматриваемая нами задача значительно проще решается одной линейкой, чем циркулем и линейкой.

Частными случаями задачи № 1 являются задачи № 2 и 3.

№ 2. — Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB. Одной линейкой найти его середину (черт. 113).



Черт. 113.

Искомая середина отрезка гармонически сопряжена бесконечно удаленной точке относительно концов отрезка. Проводим из произвольной точки D прямые DA, DB, пересекающие параллельную прямую соответственно в точках A_1 и B_1. Прямые AB_1 и A_1B пересекаются в точке M. Прямая DM пересечет AB в искомой точке C.

Сравнить решение с решением, данным в третьей теме и основанном на свойстве трапеции.

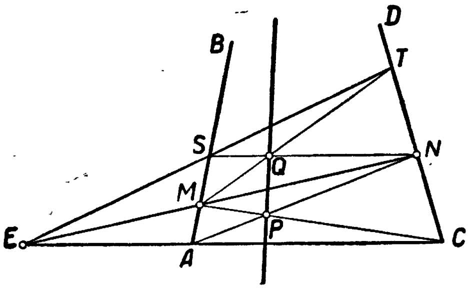
№ 3. — Дана прямая и на ней отрезок с известной серединой. Через данную точку одной линейкой провести прямую, параллельную данной.

Тема двадцать вторая

РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ОДНОЙ ЛИНЕЙКИ ЗАДАЧ С НЕДОСТУПНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

№ 1. — Провести, пользуясь одной линейкой, произвольную прямую, проходящую через точку пересечения двух данных прямых, если эта точка недоступна.

Пусть даны прямые AB и CD, точка пересечения которых недоступна (черт. 114)). Используем для ре-



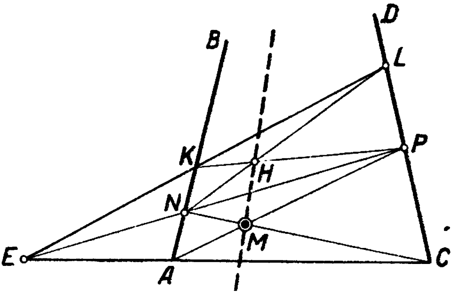
Черт. 114.

шения задачи гармоническую четверку точек. Для этого проведем прямую AC и на ней выберем произвольную точку E. Через точку E проведем произвольную прямую EMN. Построим точку P пересечения прямых AN и MC. Проведем из E произвольную прямую EST. Построим точку Q пересечения прямых MT и NS. Прямая PQ пройдет через недоступную точку.

Доказательство проводится с помощью следствия из теорем Чевы и Менелая (см. предыдущую тему). Действительно, пусть X — недоступная точка пересечения прямых AB и CD. Тогда имеем две группы гармонических четверок прямых: XA, XC, XE, XP и XA, XC, XE, XQ. Отсюда следует, что прямые XP и XQ сливаются.

№ 2. — Провести, пользуясь одной линейкой, через данную точку прямую, проходящую через недоступную точку пересечения двух данных прямых.

Пусть M—данная точка (черт. 115), а точка пересечения прямых AB и CD недоступна. Проводим произвольную прямую AC, пересекающую две данные прямые. Далее проводим прямые AMP и CMN. Прямая PN пересечет AC в точке E. Четверка прямых XA, XC, XE и XM — гармоническая, где X — недоступная точка пересечения двух данных прямых. Про-



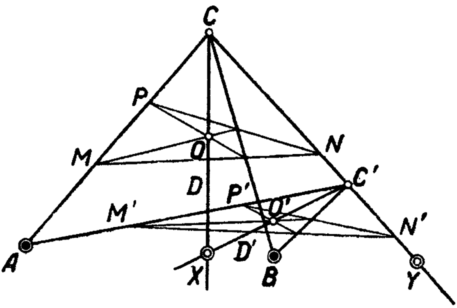
Черт. 115.

водим из точки E произвольную прямую EKL. Прямые NL и PK определяют точку H. Четверка прямых XA, XC, XE, XH — гармоническая и, следовательно, прямые XM и XH совпадают и прямая HM—искомая.

№ 3. — Через данную точку M провести прямую, параллельную двум данным прямым.

Эта задача — частный случай предыдущей, когда недоступная точка становится несобственной точкой.

№ 4. — Недоступная прямая задана двумя точками. Провести две произвольных прямых, пересекающихся на данной недоступной прямой.

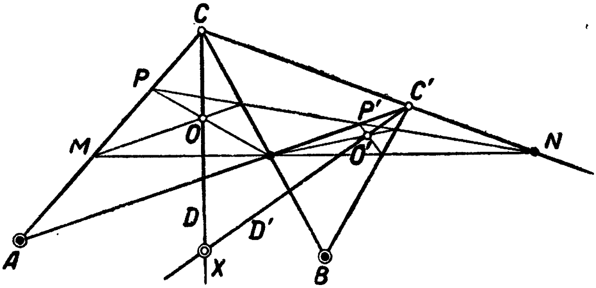


Черт. 116.

Пусть AB — недоступная прямая (черт. 116). Выбрав произвольные точки C и C' вне прямой AB, проводим прямые CA, CB, $C'A$, $C'B$ и CC'.

Строим прямую CD, гармонически сопряженную прямой CC' относительно пары CA и CB. Далее строим прямую $C'D'$, гармонически сопряженную CC' относительно пары $C'A$ и $C'D$. Точка пересечения X прямых CD и $C'D'$ лежит на недоступной прямой AB.

Действительно, пересечем гармоническую четверку CA, CB, CD, CC' прямой AB. Точки A, B, Y и X— соответственные точки пересечения. Пересечем гармоническую четверку $C'A$, $C'B$, $C'D'$, CC' прямой AB. Точки A, B, Y, X' — соответственные точки пересечения. Следовательно, точки X и X' совпадают.



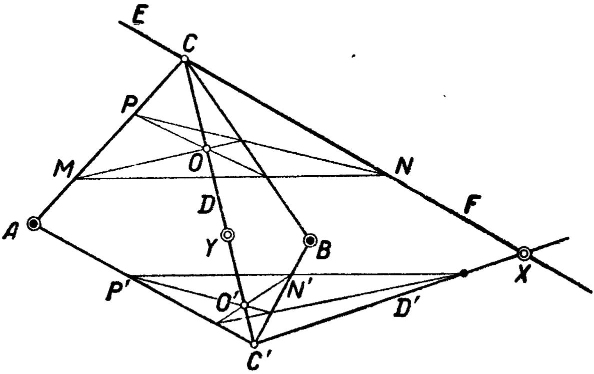
Черт. 117.

На чертеже 117 эта же задача решена несколько проще. Число проведенных прямых меньше, чем на чертеже 116, так как для построения прямых CD и $C'D'$ используются две прямые MN и NP, тогда как на чертеже 116 для построения CD проводятся прямые MN и NP, а для построения прямой $C'D'$—прямые $M'N'$ и $N'P'$.

№ 5.—Недоступная прямая задана двумя своими точками. Найти точку пересечения недоступной прямой с данной прямой.

Пусть AB (черт. 118) — недоступная прямая, заданная двумя своими точками A и B, и EF — данная прямая. Требуется найти точку пересечения этих прямых, пользуясь одной линейкой. Искомая точка пересечения X будет определена, если будет указана еще одна прямая, проходящая через эту точку.

Строим прямую CD, гармонически сопряженную CF относительно пары CA и CB. На прямой CD выбираем произвольную точку C' и строим $C'D'$ гармонически сопряженную CD относительно пары $C'A$ и $C'B$. Прямые CF и $C'D'$ пересекаются в точке X на прямой AB



Черт. 118.

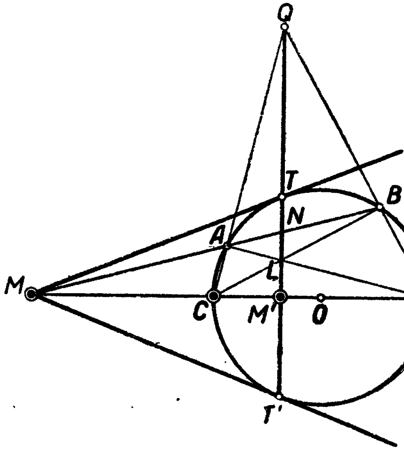
Тема двадцать третья

ПОЛЯРА ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ. ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ ИЗ ВНЕШНЕЙ ТОЧКИ

Пусть дана окружность и точка M вне круга. Проведем из точки M произвольную секущую, пересекающую окружность в точках A и A'. Построим точку M', гармонически сопряженную точке M относительно точек A A'. Проводим из точки M различные секущие, на каждой из них строим точку, гармонически сопряженную точке M относительно точек пересечения этой секущей с окружностью.

Докажем, что геометрическое место точек, сопряженных данной точке M относительно точек пересечения секущих, проведенных из точки M, с окружностью есть прямая, называемая полярой точки M относительно окружности.

Пусть дана окружность и точка M вне круга (черт. 119). Из точки M проведем произвольную секущую MAB и секущую $MCOD$, проходящую через центр O. Проведем прямые CA и DB до пересечения в точке Q. Прямые CB и AD — высоты треугольника CQD — пересекаются в точке L. Прямая QLM' — третья высота треугольника CQD—пересекает диаметр CD в точке M'. На основании теоремы, приведенной в двадцать второй теме, заключаем, что четверка точек M, M', C, D—гармоническая. Действительно C и D—две вершины треугольника, M'—основание прямой Чевы



Черт. 119.

(высоты QM'), точка M—точка пересечения основания треугольника и прямой, соединяющей основания двух других высот. Точка N, сопряженная точке M относительно точек A и B, лежит на определенной прямой—на перпендикуляре, восставленном к диаметру в точке M'.

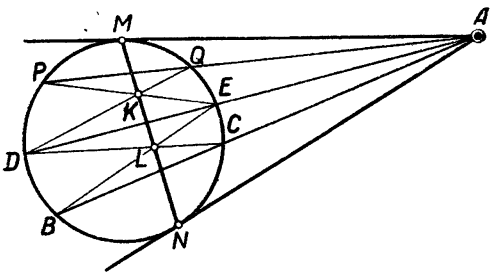
Итак, геометрическим местом точек, сопряженных точке M относительно точек пересечения с окружностью секущих, проходящих через M, есть прямая—поляра. Поляра перпендикулярна диаметру в определенной точке M'. Точка M называется полюсом поляры $M'Q$. Важно заметить, что точка L лежит на поляре. Если в частном случае секущая примет положение касательной MT, то в точке касания сольются обе точки пересечения секущей с окружностью, а следовательно, и точка, гармонически сопряженная точке M относительно слившихся двух точек. Итак, точка касания принадлежит поляре.

Построение поляры точки, лежащей вне круга

Для построения поляры точки, лежащей вне круга, достаточно из данной точки провести две касательные MT и MT' к окружности. Прямая TT', проходящая через точки касания, и будет искомой полярой (черт. 119).

Можно использовать поляру для проведения одной линейкой, касательной к окружности из внешней точки.

Пусть даны окружность и точка A вне ее (черт. 120).



Черт. 120.

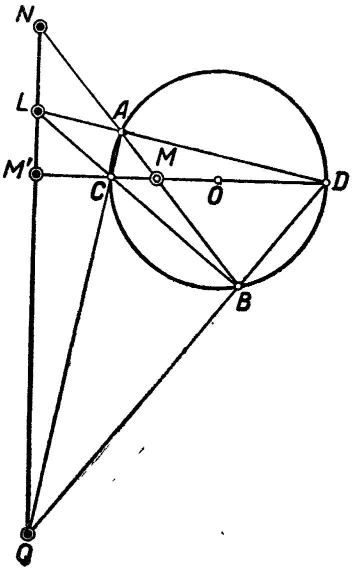
Построим одной линейкой из внешней точки A касательные к окружности. Для решения задачи достаточно построить поляру точки A. Для построения поляры проводим из точки A три произвольные секущие AQP, AED, ACB. Точка K, определяемая прямыми PE и DQ, принадлежит поляре, точка L, определяемая прямыми BE и CD, также принадлежит поляре, а потому прямая MN есть поляра точки A; а прямые AM и AN— искомые касательные.

Построение поляры точки, лежащей внутри круга

Пусть дана окружность и точка M внутри ее (черт. 121).

Через точку M проведем произвольную секущую AB и диаметр CD. Проведем прямые AC и DB до их пересечения в точке Q и прямые AD и BC до их пересечения в точке L. Рассмотрим треугольник LDQ.

Прямые LB и AQ—высоты этого треугольника. Прямая $M'D$—третья высота его.



Черт. 121.

Итак, прямые LB, QA и DM' — прямые Чевы, выходящие из вершин треугольника LDQ. Прямая AB, соединяющая основания двух высот, пересекает сторону LQ в точке N. Отсюда следует, что четверка точек L, Q, M', N — гармоническая. Гармонической является и четверка точек A, B, N, M. Таким образом, точка N, сопряженная точке M относительно точек A и B, лежит на прямой LQ — поляре точки M. Поляра LQ перпендикулярна к диаметру CD, который встречается с нею в определенной точке M'.

* * *

При составлении книги мною была использована следующая литература:

1. И. Александров. — Построения Штейнера и построения с помощью двухсторонней линейки прямого или острого угла. „Математическое образование", апрель, 1914, № 4.

2. И. Александров. — Методы решений геометрических задач на построение, изд. 17-е, 1937.

3. А. Адлер. — Теория геометрических построений. Перевод под редакцией проф. С. О. Шатуновского. Одесса, 1924.

4. О. Вольберг. — Основные идеи проективной геометрии. ОНТИ, 1935.

5. А. М. Воронец. — Геометрия циркуля. ОНТИ, 1934.

6. Д. Гильберт. — Основания геометрии. Гостехиздат, 1948.

7. Н. А. Глаголев. — Проективная геометрия. ОНТИ, 1936.

8. Н. А. Глаголев. — Элементарная геометрия. Планиметрия, Учпедгиз, М., 1944.

9. Э. Лейнек. — О построении центра данной окружности с помощью одной линейки. „Математическое образование", № 5—8, 1917.

10. А. А. Лямин. — Физико-математическая хрестоматия, т. III, книга I. Москва, 1914.
11. П. С. Моденов. — Геометрические преобразования, „Математика в школе“, № 6. 1948.
12. Д. Д. Мордухай-Болтовский. — О геометрических построениях с помощью линейки при условии, что дана неизменная дуга круга с центром. („Вестник опытной физики и элементарной математики“, № 522, 1910).
13. Д. Д. Мордухай-Болтовский. — О штейнеровских построениях на сфере. Математический сборник, п. 42, стр. 532 — 545.
14. Н. В. Наумович. — Построения, выполняемые односторонней линейкой, если задана дуга конического сечения, центр и фокус которой известны. „Математическое просвещение“, выпуск 5, 1936.
15. Д. И. Перепелкин. — Геометрические построения в средней школе. Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1947.
16. Д. И. Перепелкин. — Курс элементарной геометрии. Гостехиздат, 1948, часть I.
17. Проф. П. Попов и проф. И. Маслов. — Геометрическое черчение. Оборонгиз, 1940.
18. Радемахер и Теплиц. — Числа и фигуры. ОНТИ, 1936.
19. В. Романовский. — О геометрических построениях при помощи циркуля и постоянной прямой. „Вестник опытной физики и элементарной математики“, № 563 — 564 за 1912 г.
20. Н. Ф. Четверухин. — Методы геометрических построений. Учпедгиз, 1938.
21. Н. Ф. Четверухин. — Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии. Известия Академии педагогических наук, вып. 6, 1946.
22. Н. Ф. Четверухин. — Введение в высшую геометрию. Учпедгиз, 1935.
23. С. О. Шатуновский. — Об измерении прямолинейных отрезков и построении их при помощи циркуля и линейки.
24. Д. Шор. — О средствах, достаточных для построения геометрических задач второй степени одной линейкой. „Вестник опытной физики и элементарной математики“, 1902 — 1903.
25. Г. Штейнгауз — Математический калейдоскоп. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
26. Я. Штейнер. — Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, перевод под редакцией проф. Д. М. Синцова. Учпедгиз, 1939.
27. Дж. В. Юнг. — Проективная геометрия. Государственное издательство иностранной литературы, 1949.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть II — Геометрия циркуля

Глава III

Часть III – Дополнения к геометрии линейки

Глава IV

Редактор *А. В. Зансохов*
Художж. ред. *Г. З. Гинзбург*
Техн. редактор *В. П. Гарнек*
Корректор *Л. С. Квиль*

* * *

А 04457 Сдано в произв. 1/II 1950 г. Подписано к печати 13/VI 1950 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$=1,69 бум. л.—5,54 п. л. Уч.-изд. 4,02 л. В 1 п. л. 38 855 зн. Тир. 10 000 Цена 1 р. 45 коп. Зак. 155

* * *

Типография Изд-ва АПН.
Москва, Лобковский пер., 5/16